UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

53. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 2 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1949)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1949

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

53. Band/4. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Lammel, E. Über das Verfahren von Theodorsen zur numerischen Berechnung der Abbildungsfunktion eines einfach zusammenhängenden Bereiches 257

Prachar, K. Über höhere Minima quadratischer Formen 268

Atkinson, F. V. Symmetric Linear Operators on a Banach Space 278

Fabricius-Bjerre, Fr. Nichteuklidische Fußpunktkurven 298

Inzinger, R. Stützbare Bereiche, trigonometrische Polynome und Defizite höherer Ordnung 302

Hohenberg, F. Reelle birationale Strahlverwandtschaften im Raum als Bilder komplexer ebener Cremonatransformationen 324

Buchbesprechungen 336

Autorenverzeichnis 344

Über das Verfahren von Theodorsen zur numerischen Berechnung der Abbildungsfunktion eines einfach zusammenhängenden Bereiches.[1]

Von
Ernst Lammel, Dutzing.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 25. September 1943, Satz durch Fliegerangriff 1944 zerstört, unverändert wieder eingegangen am 25. Januar 1949.)

$\mathfrak{B}$ sei ein beschränkter einfach zusammenhängender Bereich der ζ-Ebene, welcher den Ursprung enthält und in Bezug auf diesen Punkt ein Stern ist. Die Berandung C von $\mathfrak{B}$ sei eine reguläre Kurve.

$\zeta(z)$ bilde den Bereich $\mathfrak{B}$ auf den Einheitskreis $|z|<1$ der z-Ebene konform ab, wobei $\zeta(0)=0$ und $\zeta'(0)>0$ sein soll.

$\zeta(z)$ läßt sich wegen $\zeta(0)=0$ in der Gestalt

$$\zeta(z)=z\,e^{f(z)} \tag{1}$$

schreiben. Von $f(z)$ wollen wir stets denjenigen Zweig verwenden, für welchen $f(0)$ reell ist. Die Existenz eines solchen Zweiges folgt aus $\zeta'(0)>0$.

Setzen wir $z=re^{i\varphi}$ und $f(re^{i\varphi})=g(r,\varphi)+ih(r,\varphi)$, so ergibt sich nach der *Poisson*schen Integralformel für $|z|<1$ mit Rücksicht darauf, daß $f(0)$ reell ist,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(1,\varphi')\,\frac{1+ze^{-i\varphi'}}{1-ze^{-i\varphi'}}\,d\varphi'. \tag{2}$$

Hieraus folgt bekanntlich

$$h(1,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(1,\varphi')\cot\frac{\varphi-\varphi'}{2}\,d\varphi', \tag{3}$$

wobei unter dem Integral der *Cauchy*sche Hauptwert zu verstehen ist.

---

[1] Vorgetragen auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vom 6. bis 10. September 1943 in Würzburg.

Lautet nun die Gleichung der Berandungskurve C in der ζ-Ebene:

$$\zeta(\Theta) = e^{\Psi(\Theta) + i\Theta},$$

(vgl. Abb. 1 und 2), so wird dann

$$g(1, \varphi) = \Psi(\Theta) \text{ und } h(1, \varphi) = -\varphi + \Theta.$$

Da $\Psi(\Theta)$ gegeben ist, so ließe sich nach (2) $f(z)$ und damit nach (1) auch $\zeta(z)$ bestimmen, wenn $\Theta(\varphi)$ bekannt wäre.

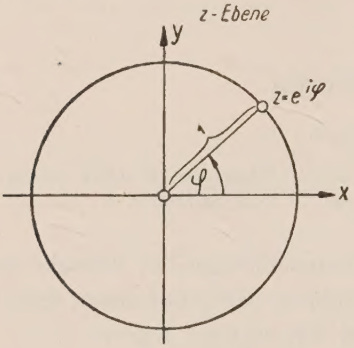

Abb. 1.

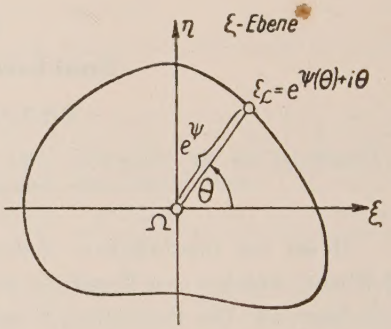

Abb. 2.

$\Theta(\varphi)$ ist eine reguläre mit φ monoton wachsende Funktion, welche bei Zunahme von φ um 2π gleichfalls um 2π wächst. Nach (3) genügt $\Theta(\varphi)$ der folgenden Integralgleichung

$$-\varphi + \Theta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\Theta(\varphi')) \cot \frac{\varphi - \varphi'}{2} d\varphi'. \tag{4}$$

$\Psi(\Theta)$ ist hierin eine reguläre periodische Funktion mit der Periode 2π.

Mit $\Theta(\varphi) = \varphi + \varepsilon(\varphi)$ geht (4) in

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\varphi' + \varepsilon(\varphi')) \cot \frac{\varphi - \varphi'}{2} d\varphi' \tag{5}$$

über. $\varepsilon(\varphi)$ ist eine periodische reguläre Funktion von φ mit der Periode 2π, für welche $\frac{d\varepsilon(\varphi)}{d\varphi} \geqq -1$ gilt, da $\Theta(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion ist.

Formt man (4) durch partielle Integration um und wird Θ als neue Integrationsvariable eingeführt, so erhält man

$$-\Theta + \varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{d\Theta'} \ln \sin^2 \frac{\varphi(\Theta) - \varphi(\Theta')}{2} d\Theta'$$

oder mit $\varphi(\Theta) = \Theta + \eta(\Theta)$

$$\eta(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{d\Theta'} \ln \sin^2 \left(\frac{\Theta - \Theta'}{2} + \frac{\eta(\Theta) - \eta(\Theta')}{2} \right) d\Theta' \quad (6)$$

$\eta(\Theta)$ ist eine periodische reguläre Funktion von Θ mit der Periode 2π, für welche $\frac{d\eta(\Theta)}{d\Theta'} \geqq -1$ gilt, da $\varphi(\Theta)$ eine monoton wachsende Funktion ist.

Aus (6) bestimmt *Theodorsen*[2] die gesuchte Funktion $\eta(\Theta)$ durch ein Iterationsverfahren. Um aus (6) $\eta(\Theta)$ durch schrittweise Näherung zu bestimmen, wähle man für $\eta(\Theta)$ eine passende Näherung $\eta_0(\Theta)$ und berechne vermöge

$$\eta_1(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{d\Theta'} \ln \sin^2 \tfrac{1}{2} (\Theta - \Theta' + \eta_0(\Theta) - \eta_0(\Theta'))\, d\Theta'$$

eine weitere Näherung $\eta_1(\Theta)$. Mit $\eta_1(\Theta)$ verfahre man analog wie mit $\eta_0(\Theta)$ usw. Es ergibt sich so die Rekursionsformel

$$\eta_{\nu+1}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{d\Theta'} \ln \sin^2 \tfrac{1}{2} (\Theta - \Theta' + \eta_\nu(\Theta) - \eta_\nu(\Theta'))\, d\Theta', \quad (7)$$

$$\nu = 1, 2, \ldots$$

Einen Beweis für die Konvergenz seines Verfahrens erbringt *Theodorsen* in der Originalarbeit jedoch nicht, sondern erprobt die Brauchbarkeit seines Verfahrens nur an speziellen Beispielen.

Im folgenden wollen wir hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens von *Theodorsen* unter der Annahme $\eta_0(\Theta) \equiv 0$ herleiten.

Wir lösen zunächst die Integralgleichung (5) nach der Methode der schrittweisen Näherung mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\varphi' + \varepsilon_\nu(\varphi')) \cot \frac{\varphi - \varphi'}{2} d\varphi', \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad (8)$$

wobei wir $\varepsilon_0(\varphi)$ passend wählen.

Soll $\varepsilon_0(\varphi)$ eine Näherung für $\varepsilon(\varphi)$ sein, so müssen wir $\varepsilon_0(\varphi)$ als reguläre periodische Funktion von φ mit der Periode 2π wählen, für

---

[2] *Th. Theodorsen*, Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape. Nat. Advis. Com. Aeronautics, Rep. Nr. 411, 1—13 (1931). Vgl. auch *H. Gebelein*, Theorie der ebenen Potentialströmung um beliebige Tragflügelprofile. Ingenieur-Archiv **9** (1938), S. 214—240.

welche $\frac{d\,\varepsilon_0(\varphi)}{d\,\varphi} \geqq -1$ ist. (8) liefert uns dann zu $\varepsilon_0(\varphi)$ eine Folge regulärer periodischer Funktionen $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit der Periode 2π.

Konvergiert nun $\{\zeta_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ gleichmäßig und ist außerdem $\frac{d\,\varepsilon_\nu(\varphi)}{d\,\varphi} \geqq -1$; $\nu = 1, 2, \ldots$, so gilt

$$\varepsilon(\varphi) = \lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu(\varphi).$$

Nun entspricht vermöge $\varphi = \varphi(\Theta)$ jeder in $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergenten Folge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ regulärer periodischer Funktionen mit der Periode 2π, für welche außerdem $\frac{d\,\varepsilon_\nu(\varphi)}{d\,\varphi} \geqq -1$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, eine in $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergente Folge $\{\eta_\nu(\Theta)\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ regulärer periodischer Funktionen mit der Periode 2π, für welche ebenfalls $\frac{d\,\eta_\nu(\Theta)}{d\,\Theta} \geqq -1$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ist und umgekehrt. Insbesondere gehört zu $\varepsilon_0(\varphi) \equiv 0$ die Funktion $\eta_0(\Theta) \equiv 0$ und umgekehrt.

Wir werden zeigen, daß sich die bei Wahl von $\varepsilon_0(\varphi)$ mit Hilfe von (8) ergebende Funktionenfolge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 0, 1, \ldots)$ gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung $\varepsilon(\varphi)$ von (5) konvergiert, sobald

1. $2\pi \int_0^{2\varphi} \varepsilon_0''^2(\varphi)\, d\varphi < 1$ und

2. $A + 4\pi B \sqrt{\frac{1 - A^{2(\nu+1)}}{1 - A^2} + \frac{A^{2\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon'_0(\varphi)\, d\varphi} \leqq 1$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$

ist, wobei

$$A = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \Theta \leqq 2\pi} \left| \frac{d\Psi}{d\Theta} \right| \quad \text{und} \quad B = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \Theta \leqq 2\pi} \left| \frac{d^2\Psi}{d\Theta^2} \right| \quad \text{ist.}$$

Hieraus folgt, daß die bei der Wahl von $\eta_0(\Theta) \equiv 0$ sich mit Hilfe von (7) ergebende Funktionenfolge $\{\eta_\nu(\Theta)\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung $\eta(0)$ von (6) konvergiert, sobald $A < 1$ und $B < \frac{1}{4\pi}(1 - A)\sqrt{1 - A^2}$ ist.

§ 1. Vorbereitende Bemerkungen.

Zunächst wollen wir zeigen, daß aus der beliebig oftmaligen Differenzierbarkeit von $\Psi(\Theta)$ und $\varepsilon_\nu(\varphi)$ auch die beliebig oftmalige Differenzierbarkeit von $\varepsilon_{\nu+1}(\varphi)$ folgt. $\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))$ läßt sich nämlich in eine beliebig oft gliedweise differenzierbare Fourierreihe

$$\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi)) = a_0^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_\mu^{(\nu)} \cos(\mu\varphi) + b_\mu^{(\nu)} \sin(\mu\varphi)) \tag{9}$$

entwickeln und nach (8) besitzt dann $\varepsilon_{\nu+1}(\varphi)$ die Fourierentwicklung

$$\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} (b_\mu^{(\nu)} \cos(\mu\varphi) - a_\mu^{(\nu)} \sin(\mu\varphi)), \tag{10}$$

welche ebenfalls beliebig oft gliedweise differenzierbar ist.

Da wir von $\varepsilon_0(\varphi)$ beliebig oftmalige Differenzierbarkeit vorausgesetzt haben, so besitzt also auch jede Funktion der Folge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die nämliche Eigenschaft.

$\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))$ und $\varepsilon_{\nu+1}(\varphi)$ sind zueinander konjugierte Funktionen. Aus (9) und (10) folgt

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon_{\nu+1}^2(\varphi)\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} \Psi^2(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))\, d\varphi; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Ferner ist nach (10)

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi = 0; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Auch $\dfrac{d\,\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi}$ und $\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi)$ sind ebenfalls wie $\dfrac{d^2\,\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi^2}$ und $\varepsilon''_{\nu+1}(\varphi)$ zueinander konjugierte Funktionen und es ist mit Rücksicht auf (9) und (10)

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi}\right)^2 d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi^2}\right)^2 d\varphi$$

und

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon'_\nu(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \varepsilon''_\nu(\varphi)\, d\varphi = 0 \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

§ 2. Herleitung hinreichender Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

Da $\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi)$ und $\dfrac{d\,\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\,\varphi}$ zueinander konjugierte Funktionen sind, welche im Intervall $(0, 2\pi)$ den Mittelwert Null haben, so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_{\nu+1}(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\,\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\,\varphi}\right)^2 d\,\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\,\Psi}{d\,\Theta_\nu}\right)^2 (1+\varepsilon'_\nu(\varphi))^2\,d\varphi \leqq A^2 \int_0^{2\pi} (1+2\,\varepsilon'_\nu(\varphi)+\varepsilon'^2_\nu(\varphi))\,d\varphi =$$

$$= A^2\left(2\pi + \int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi\right),$$

worin

$$A = \operatorname*{Max}_{0\leqq\Theta\leqq 2\pi} \left|\frac{d\,\Psi}{d\,\Theta}\right| \tag{11}$$

bedeutet.

Es ist also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_{\nu+1}(\varphi)\,d\varphi \leqq A^2\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi\right),$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi \leqq A^2\frac{1-A^{2\nu}}{1-A^2} + \frac{A^{2\nu}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_0(\varphi)\,d\varphi, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

folgt.

Da $\int_0^{2\pi} (\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon_\nu(\varphi))\,d\varphi = 0$ ist, so besitzt $\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon_\nu(\varphi)$ im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ mindestens eine Nullstelle φ_0. Es ist mithin

$$\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon_\nu(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\varepsilon'_{\nu+1}(\omega) - \varepsilon'_\nu(\omega))\,d\omega$$

oder

$$(\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon_\nu(\varphi))^2 = \left\{\int_{\varphi_0}^{\varphi} (\varepsilon'_{\nu+1}(\omega) - \varepsilon'_\nu(\omega))\,d\omega\right\}^2.$$

Hieraus erhält man durch Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichung

$$(\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon_\nu(\varphi))^2 \leqq 2\pi \int_0^{2\pi} (\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon'_\nu(\varphi))^2\,d\varphi$$

und mithin

$$\operatorname{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} (\varepsilon_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon_\nu(\varphi))^2 \leqq 2\pi \int_0^{2\pi} (\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon'_\nu(\varphi))^2 \, d\varphi. \tag{13}$$

Da $\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon'_\nu(\varphi)$ und $\dfrac{d}{d\varphi}\,[\Psi(\Theta_\nu(\varphi)) - \Psi(\Theta_{\nu-1}(\varphi))]$ zueinander konjugierte Funktionen sind, welche im Intervall $(0, 2\pi)$ den Mittelwert Null haben, so ist also

$$\int_0^{2\pi} (\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi) - \varepsilon'_\nu(\varphi))^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{d\varphi} [\Psi(\Theta_\nu(\varphi)) - \Psi(\Theta_{\nu-1}(\varphi))] \right\}^2 d\varphi.$$

Nun wird

$$\frac{d}{d\varphi} [\Psi(\Theta_\nu(\varphi)) - \Psi(\Theta_{\nu+1}(\varphi))] = \frac{d\Psi(\Theta_\nu)}{d\Theta_\nu} \frac{d\Theta_\nu}{d\varphi} - \frac{d\Psi(\Theta_{\nu-1})}{d\Theta_{\nu-1}} \frac{d\Theta_{\nu-1}}{d\varphi} =$$

$$= \left(\frac{d\Psi(\Theta_\nu)}{d\Theta_\nu} - \frac{d\Psi(\Theta_{\nu-1})}{d\Theta_{\nu-1}} \right) \frac{d\Theta_\nu}{d\varphi} + \frac{d\Psi(\Theta_{\nu-1})}{d\Theta_{\nu-1}} \left(\frac{d\Theta_\nu}{d\varphi} - \frac{d\Theta_{\nu-1}}{d\varphi} \right).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$F(\varphi) = \left(\frac{d\Psi(\Theta_\nu)}{d\Theta_\nu} - \frac{d\Psi(\Theta_{\nu-1})}{d\Theta_{\nu-1}} \right) \frac{d\Theta_\nu}{d\varphi} \text{ und } G(\varphi) = \frac{d\Psi(\Theta_{\nu-1})}{d\Theta_{\nu-1}} \left(\frac{d\Theta_\nu}{d\varphi} - \frac{d\Theta_{\nu-1}}{d\varphi} \right),$$

so haben wir also das Integral $\int_0^{2\pi} (F(\varphi) + G(\varphi))^2 \, d\varphi$ abzuschätzen, wofür wir

$$\int_0^{2\pi} (F(\varphi) + G(\varphi))^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} F^2(\varphi) d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} F(\varphi) G(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} G^2(\varphi) \, d\varphi$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} F^2(\varphi) \, d\varphi + 2 \sqrt{\int_0^{2\pi} F^2(\varphi) \, d\varphi \int_0^{2\pi} G^2(\varphi) \, d\varphi} + \int_0^{2\pi} G^2(\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \left(\sqrt{\int_0^{2\pi} F^2(\varphi) \, d\varphi} + \sqrt{\int_0^{2\pi} G^2(\varphi) \, d\varphi} \right)^2 \tag{14}$$

erhalten.

Nun ergibt sich durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$F(\varphi) = (\Theta_\nu - \Theta_{\nu-1}) \left. \frac{d\Theta_\nu}{d\varphi} \frac{d^2\Psi}{d\Theta^2} \right|_{\Theta = \overline{\Theta}} = (\varepsilon_\nu(\varphi) - \varepsilon_{\nu-1}(\varphi))(1 + \varepsilon'_\nu(\varphi)) \left. \frac{d^2\Psi}{d\Theta^2} \right|_{\Theta = \overline{\Theta}}$$

also wenn $\operatorname{Max}_{0 \leqq \Theta \leqq 2\pi} \left| \dfrac{d^2\Psi}{d\Theta^2} \right| = B$ gesetzt wird, (15)

$$\int_0^{2\pi} F^2(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2\Psi}{d\Theta^2}\bigg|_{\Theta=\overline{\Theta}}\right)^2 (1+\varepsilon'_\nu(\varphi))^2(\varepsilon_\nu(\varphi)-\varepsilon_{\nu-1}(\varphi))^2 d\varphi$$

$$\leqq B^2 \max_{0\leqq\psi\leqq 2\pi} (\varepsilon_\nu(\varphi)-\varepsilon_{\nu-1}(\varphi))^2 \int_0^{2\pi} (1+\varepsilon'_\nu(\varphi))^2 d\varphi.$$

Da $\int_0^{2\pi} \varepsilon'_\nu(\varphi)\,d\varphi = 0$ und wegen (13) ergibt sich schließlich

$$\int_0^{2\pi} F^2(\varphi)\,d\varphi \leqq 4\pi^2 B^2 \left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi\right) \int_0^{2\pi} (\varepsilon'_\nu(\varphi)-\varepsilon'_{\nu-1}(\varphi))^2 d\varphi$$

oder

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} F^2(\varphi)d\varphi} \leqq 2\pi B \sqrt{1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi} \sqrt{\int_0^{2\pi} (\varepsilon'_\nu(\varphi)-\varepsilon'_{\nu-1}(\varphi))^2 d\varphi}.$$

Weiter erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} G^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Psi(\Theta_{\nu-1})}{d\Theta_{\nu-1}}\right)^2 (\varepsilon'_\nu(\varphi)-\varepsilon'_{\nu-1}(\varphi))^2 d\varphi \leqq A^2 \int_0^{2\pi} (\varepsilon'_\nu(\varphi)-\varepsilon'_{\nu-1}(\varphi))^2\,d\varphi$$

oder

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} G^2(\varphi)\,d\varphi} \leqq A \sqrt{\int_0^{2\pi} (\varepsilon'_\nu(\varphi)-\varepsilon'_{\nu-1}(\varphi))^2\,d\varphi}$$

Es wird also

$$\int_0^{2\pi} (\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi)-\varepsilon'_\nu(\varphi))^2\,d\varphi \leqq$$

$$\leqq \left(A+2\pi B\sqrt{1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi}\right) \int_0^{2\pi} (\varepsilon'_\nu(\varphi)-\varepsilon'_{\nu-1}(\varphi))^2\,d\varphi.$$

Ist nun

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(A+2\pi B\sqrt{1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\,d\varphi}\right) < 1$$

oder wegen (12)

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(A+2\pi B\sqrt{\frac{1-A^{2(\nu+1)}}{1-A^2}+\frac{A^{2\nu}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_0(\varphi)\,d\varphi}\right) < 1, \qquad (16)$$

so erschließt man hieraus leicht die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

Da A und B nichtnegative Größen sind, so ist für (16) notwendig und hinreichend, daß

$$A < 1 \text{ und } B < \frac{1}{2\pi}(1-A)\sqrt{1-A^2} \text{ ist.}$$

§ 3. Herleitung hinreichender Bedingungen dafür, daß für jede Funktion der Folge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ $\frac{d\varepsilon_\nu(\varphi)}{d\varphi} \geqq -1$ ist.

Es ist $\frac{d\varepsilon_\nu(\varphi)}{d\varphi} \geqq -1$, sobald $\left(\frac{d\varepsilon_\nu(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 \leqq 1$ gilt.

Da $\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi)$ den Mittelwert Null hat, so gibt es im Intervall $(0, 2\pi)$ mindestens eine Stelle φ_0, für welche $\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi)$ den Wert Null hat. Es ist also

$$\varepsilon'_{\nu+1}(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{2\pi} \varepsilon''_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi.$$

Hieraus erhält man mit Hilfe der *Schwarz*schen Ungleichung

$$\varepsilon'^{2}_{\nu+1}(\varphi) = \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \varepsilon''_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi\right)^2 \leqq 2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^{2}_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi. \tag{17}$$

$\varepsilon''_{\nu+1}(\varphi)$ und $\frac{d^2\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi^2}$ sind zueinander konjugierte Funktionen, welche im Intervall $(0, 2\pi)$ den Mittelwert Null haben. Es ist deshalb

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon''^{2}_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi^2}\right)^2 d\varphi.$$

Nun ist

$$\frac{d\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi} = \left(1 + \varepsilon'_\nu(\varphi)\right)\frac{d\Psi}{d\Theta_\nu} \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2\Psi(\varphi+\varepsilon_\nu(\varphi))}{d\varphi^2} = (1+\varepsilon'_\nu(\varphi))^2 \frac{d^2\Psi}{d\Theta_\nu^2} + \varepsilon''_\nu(\varphi)\frac{d\Psi}{d\Theta_\nu}.$$

Also wird

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon''^{2}_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{(1+\varepsilon'_\nu(\varphi))^2 \frac{d^2\Psi}{d\Theta_\nu^2} + \varepsilon''_\nu(\varphi)\frac{d\Psi}{d\Theta_\nu}\right\}^2 d\varphi.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$F(\varphi) = (1 + \varepsilon'_\nu(\varphi))^2 \frac{d^2\Psi}{d\Theta_\nu^2} \text{ und } G(\varphi) = \varepsilon''_\nu(\varphi) \frac{d\Psi}{d\Theta_\nu},$$

so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} F^2(\varphi)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} (1+\varepsilon'_\nu(\varphi))^4 \left(\frac{d^2\Psi}{d\Theta_\nu^2}\right)^2 d\varphi \leqq B^2 (1 + \operatorname*{Max}_{0 \leqq \psi \leqq 2\pi} |\varepsilon'_\nu(\varphi)|)^2 (2\pi + \int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\, d\varphi)$$

und wegen (17) weiter

$$\leqq 2\pi B^2 \left(1 + \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\, d\varphi\right)$$

oder

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} F^2(\varphi) d\varphi} \leqq \sqrt{2\pi}\, B \left(1 + \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi}\right) \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi) d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist $\int_0^{2\pi} G^2(\varphi)\, d\varphi \leqq A^2 \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi$ oder

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} G^2(\varphi)\, d\varphi} \leqq A \sqrt{\int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi}.$$

Es ergibt sich dann also nach (14)

$$2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi \leqq$$

$$\leqq \left\{ 2\pi B \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\, d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi}\right) + \right.$$

$$\left. + A \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi} \right\}^2. \qquad (18)$$

Nach (17) haben wir $\varepsilon'^2_\nu(\varphi) < 1$, sobald $2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi < 1$ ist

und wegen (18) wird $2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_{\nu+1}(\varphi)\, d\varphi < 1$, wenn

$2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_\nu(\varphi)\, d\varphi < 1$ und $A + 4\pi B \sqrt{1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon'^2_\nu(\varphi)\, d\varphi} < 1$ ist.

Wählen wir also $2\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon''^2_0(\varphi)\, d\varphi < 1$

und gilt außerdem

$$A+4\pi B\sqrt{\frac{1-A^{2(\nu+1)}}{1-A^2}+\frac{A^{2\nu}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon_0'^2(\varphi)\,d\varphi}\geqq 1;\ \nu=0,1,2,\ldots \qquad (19)$$

so ist für jede Funktion der Folge $\{\varepsilon_\nu(\varphi)\}$, $(\nu=0,1,2,\ldots)$ $\dfrac{d\varepsilon_\nu(\varphi)}{d\varphi}\geqq -1$.

Da A und B nur positiv sein können, so ergeben sich mit Rücksicht auf (16) und (19) als hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des beschriebenen Iterationsverfahrens:

1) $\Psi(\Theta)$ und $\varepsilon_0(\varphi)$ sind periodische Funktionen mit der Periode 2π, welche beliebig oft differenzierbar sind,

2) $\dfrac{d\varepsilon_0(\varphi)}{d\varphi}\geqq -1$ und $2\pi\int_0^{2\pi}\varepsilon_0''^2(\varphi)\,d\varphi<1$,

3) $A+4\pi B\sqrt{\dfrac{1-A^{2(\nu+1)}}{1-A^2}+\dfrac{A^{2\nu}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon_0'^2(\varphi)\,d\varphi}\leqq 1;\ \nu=0,1,\ldots$

wobei $A=\underset{0\leqq\Theta\leqq 2\pi}{\mathrm{Max}}\left|\dfrac{d\Psi}{d\Theta}\right|$ und $B=\underset{0\leqq\Theta\leqq 2\pi}{\mathrm{Max}}\left|\dfrac{d^2\Psi}{d\Theta^2}\right|$ ist.

Wählt man insbesondere $\varepsilon_0(\varphi)\equiv 0$, so ist die Bedingung 2) von selbst erfüllt und für 3) sind

$$A<1 \text{ und } B\leqq\frac{1}{4\pi}(1-A)\sqrt{1-A^2}$$

notwendig und hinreichend.

Über höhere Minima quadratischer Formen.

Von
K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 25. März 1949.)

1. Einleitung.

Sei K ein konvexer Körper im R_n, f seine Eichfunktion. Unter m_k verstehen wir eine Zahl, die folgendermaßen definiert ist:

1. Für höchstens $k-1$ Gitterpunktpaare gilt $f < m_k$.
2. Für mindestens k Gitterpunktpaare gilt $f \leqq m_k$.

Unter M_k verstehen wir die obere Grenze der m_k für eine Klasse von Funktionen f. Die Zahlen M_k wurden meines Wissens zuerst von *E. Hlawka* eingeführt. In dieser Arbeit sollen die M_k für binäre positive quadratische und hermitesche Formen[1] untersucht werden. M_1 ist ersichtlich das gewöhnliche größte erste Minimum der Form. Diese Zahlen M_1 wurden von *Speiser*, *Perron*, *Oppenheim* u. a. für hermitesche Formen in speziellen imaginär quadratischen Zahlkörpern bestimmt, bzw. für allgemeine imaginärquadratische Zahlkörper abgeschätzt.

Hier soll M_2 für quadratische Formen und für hermitesche Formen in den speziellen Körpern $K(i)$, $K(i\sqrt{2})$, $K(i\sqrt{3})$, $K(i\sqrt{7})$, $K(i\sqrt{11})$ bestimmt werden. Weiter wird M_k für genügend große k bei quadratischen Formen bestimmt (5).

2. Quadratische Formen in K (1).

Sei nun $f^2 = a x^2 + 2b xy + cy^2$ eine positive quadratische Form mit der Determinante $ac - b^2 = 1$. Wir beweisen den

Satz 1: Für jede Form f gibt es mindestens zwei Gitterpunktpaare[2] für die $f^2 \leqq \sqrt{\frac{64}{15}}$. Es gibt Formen f so, daß für höchstens einen Gitterpunkt $f^2 < \sqrt{\frac{64}{15}}$ ist.

---

[1] In der ganzen Arbeit sollen unter Formen immer positive Formen gemeint sein.

[2] Gitterpunkt $\neq (0, 0)$. Im folgenden sagen wir statt Gitterpunktpaar oft nur „Gitterpunkt".

Beweis: Wir schreiben

$$f^2 = a\,(x + \frac{b}{a}\ y)^2\ + \frac{1}{a}\,y^2$$

Wir können annehmen, daß a schon das erste Minimum ist und wir können weiter annehmen, daß die Form reduziert sei, also

$$0 \leqq b \leqq \frac{a}{2}, \quad a \leqq \frac{1+b^2}{a}, \quad b = \frac{a}{2}\,\gamma \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $4\,a^2 \leqq 1 + b^2$.

Es ist dann auch

$$4\,a^2 \leqq 1 + \frac{a^2}{4},\ a \leqq \sqrt{\frac{4}{15}}$$

Nun wird für $(x, y) = (1,0)$

$$f^2 = a \leqq \sqrt{\frac{4}{15}} \leqq \sqrt{\frac{64}{15}}$$

und für $(x, y) = (2,0)$

$$f^2 = 4a \leqq 4\sqrt{\frac{4}{15}}\ = \sqrt{\frac{64}{15}}$$

2. $4a^2 > 1 + b^2$

Also $4a^2 > 1 + \frac{1}{4}\gamma^2 a^2,\ \ a > \sqrt{\frac{4}{16-\gamma^2}}$

Dann wird für $(x, y) = (1,0)$

$$f^2 = a \leqq \sqrt{\frac{4}{3}} \leqq \sqrt{\frac{64}{15}}$$

da bei jeder Form $f\ a \leqq \sqrt{\frac{4}{3}}$ ist.

Für $(x, y) = (0,1)$ wird

$$f^2 = a\,\gamma^2\,\frac{1}{4} + \frac{1}{a}$$

Diese Funktion von a ist monoton fallend für $a \leqq \frac{2}{\gamma}$, also jedenfalls für $a \leqq 2$. Ihr größter Wert im Intervall $[\sqrt{\frac{4}{16-\gamma^2}},\ 2]$ wird also für $\sqrt{\frac{4}{16-\gamma^2}}$ erreicht. Daher für $(x, y) = (1,0)$

$$f^2 \leqq \sqrt{\frac{64}{16-\gamma^2}} \leqq \sqrt{\frac{64}{15}}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Für den zweiten Teil bemerken wir, daß die Form

$$f^2 = \sqrt{\frac{4}{15}}\,(x^2 + xy + 4y^2) = \sqrt{\frac{4}{15}}\,(x + \frac{1}{2}\,y)^2 + \sqrt{\frac{15}{4}}\,y^2 < \sqrt{\frac{64}{15}}$$

nur für $(x, y) = (\pm\ 1{,}0)$. Denn es ist für

$y = 0, |x| \geqq 2 \quad f^2 \geqq 2^2 \sqrt{\frac{4}{15}} = \sqrt{\frac{64}{15}},$

$|y| = 1, \quad f^2 \geqq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{15}} + \sqrt{\frac{15}{4}} = \sqrt{\frac{64}{15}}, \quad$ wegen $|x \pm \frac{1}{2}| \geqq \frac{1}{2},$

$|y| \geqq 2 \quad f^2 \geqq 4\sqrt{\frac{15}{4}} > \sqrt{\frac{64}{15}}$

3. Hermitesche Formen in $K(i)$, $K(i\sqrt{3})$, $K(i\sqrt{7})$.

In diesem Abschnitt betrachten wir positive hermitesche Formen $f^2 = ax\bar{x} + b\,x\bar{y} + \bar{b}\bar{x}y + cy\bar{y}$ mit der Determinante $ac - b\bar{b} = 1$. Wir schreiben sie in der Form

$$f^2 = a\,|x + \frac{\bar{b}}{a}\,y|^2 + \frac{1}{a}\,|y|^2$$

Seien nun x, y ganze Zahlen aus $K(i)$. Ebenso wie wir in 2. die Gitterpunktpaare (x, y) $(-x, -y)$ bei der Abzählung als nicht verschieden betrachteten, fassen wir nun im Wort Gitterpunkt das ganze Quadrupel von Gitterpunkten $(\pm x, \pm y)\,(\pm ix, \pm iy)$ zusammen.

Wir beweisen nun

Satz 2: Zu jeder Form f^2 gibt es mindestens zwei Gitterpunkte (natürlich $\neq (0{,}0)$) für die $f^2 \leqq \sqrt{\frac{8}{3}}$ und es gibt Formen für die $f^2 < \sqrt{\frac{8}{3}}$ nur für einen Gitterpunkt gilt[3].

Beweis: Wir können annehmen, daß a schon Minimum von f^2 ist und

$$|\frac{\bar{b}}{a}| = \gamma\,\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad a \leqq \frac{1 + b\bar{b}}{a}.$$

(vgl. z. B. *Perron*, Math. Zeitschr. 36).

[3] M_1^2 ist in diesem Falle $= \sqrt{2}$ (*Perron*, Math. Zeitschr. 36).

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $2a^2 < 1 + b\bar{b}$.

Dann ist auch $2a^2 < 1 + a^2 \frac{1}{2}$, $a < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Für $(x, y) = (1,0)$ ist

$$f^2 = a < \sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Für $(x, y) = (1 + i, 0)$ wird

$$f^2 = 2a < 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

2. $2a^2 \geqq 1 + b\bar{b}$,

also ist hier $2a^2 \geqq 1 + a^2\gamma^2 \frac{1}{2}$, $a \geqq \sqrt{\frac{2}{4-\gamma^2}}$

Für $(x, y) = (1, 0)$ ist $f^2 = a \leqq \sqrt{2}$,

da das erste Minimum $a \leqq \sqrt{2}$ ist (*Perron*, loc. cit.).

Für $(x, y) = (0, 1)$ hat man

$$f^2 = \frac{1}{2}\gamma^2 a + \frac{1}{a}.$$

Diese Funktion von a ist monoton fallend für $\sqrt{\frac{2}{4-\gamma^2}} \leqq a \leqq \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$

und daher ist für $(x, y) = (0, 1)$

$$f^2 \leqq \sqrt{\frac{8}{4-\gamma^2}} \leqq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Zum zweiten Teil des Satzes bemerken wir, daß die Ungleichung

$$f^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|x + \frac{1+i}{2}y|^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\,|y|^2 < \sqrt{\frac{8}{3}}$$

nur für $(x, y) = (1, 0)$ gilt. Denn für

$|x| \geqq \sqrt{2}, y = 0 \qquad f^2 \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

$|y| = 1 \qquad f^2 \geqq \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$ da $|x + \frac{1+i}{2}| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|y| \geqq \sqrt{2} \qquad f^2 \geqq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 > \sqrt{\frac{8}{3}}$

Da die Rechnungen für die Körper $K(i\sqrt{3})$ und $K(i\sqrt{7})$[4] ähnlich verlaufen, können wir uns hier kürzer fassen. Für den ersten Körper ist unter einem „Gitterpunkt" das Sextupel $(\pm x, \pm y)$ $(\pm \varepsilon x, \pm \varepsilon y)$ $(\pm \varepsilon^2 x, \pm \varepsilon^2 y)$, $\varepsilon^3 = 1$, von Paaren ganzer Zahlen zu verstehen, während für den zweiten Körper wieder nur das Paar $(\pm x, \pm y)$ darunter verstanden werden soll.

Satz 3: Für hermitesche Formen in $K(i\sqrt{3})$ ist $M_2^2 = \sqrt{\frac{27}{8}}$ und es gibt Formen, für die $m_2^2 = \sqrt{\frac{27}{8}}$.

Beweis: Sei $\left|\frac{\bar{b}}{a}\right| = \gamma \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0 \leqq \gamma \leqq 1$, $a \leqq \frac{1+b\bar{b}}{a}$ (*Perron*, loc. cit.)

1. $3a^2 < 1 + b\bar{b}$, $3a^2 < 1 + \frac{1}{3}a^2$, $a < \sqrt{\frac{3}{8}}$

$(x, y) = (1, 0)$ $\qquad f^2 = a < \sqrt{\frac{3}{8}} < \sqrt{\frac{27}{8}}$

$(x, y) = (\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3}), 0)$ $f^2 = 3a < 3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{27}{8}}$

2. $3a^2 \geqq 1 + b\bar{b}$, $\qquad 3a^2 \geqq 1 + \frac{1}{3}\gamma^2 a^2$, $a \geqq \sqrt{\frac{3}{9-\gamma^2}}$

$(x, y) = (1, 0)$ $\qquad f^2 = a \leqq \sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{\frac{27}{8}}$

$(x, y) = (0, 1)$ $\qquad f^2 = \frac{1}{3}\gamma^2 a + \frac{1}{a} \leqq \sqrt{\frac{27}{9-\gamma^2}} \leqq \sqrt{\frac{27}{8}}$

und $\sqrt{\frac{3}{8}}\left|x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) y\right|^2 + \sqrt{\frac{8}{3}}|y|^2 < \sqrt{\frac{27}{8}}$

gilt nur für $(x, y) = (1, 0)$.

Satz 4: Für hermitesche Formen in $K(i\sqrt{7})$ ist $M_2^2 = \sqrt{\frac{14}{5}}$, und es gibt Formen, für die $m_2^2 = \sqrt{\frac{14}{5}}$.

Beweis: Sei $\left|\frac{\bar{b}}{a}\right| = \gamma\sqrt{\frac{4}{7}}$, $0 \leqq \gamma \leqq 1$, $a \leqq \frac{1+b\bar{b}}{a}$ (*Perron*, loc. cit.)

[4] Für diese Körper ist $M_1^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, bzw. $= \sqrt{\frac{7}{3}}$ (*Perron*, loc. cit.).

1. $2a^2 < 1 + b\bar{b}$, $\qquad 2a^2 < 1 + \frac{4}{7}a^2,\ a < \sqrt{\frac{7}{10}}$

$(x, y) = (1, 0)$ $\qquad f^2 = a < \sqrt{\frac{7}{10}} < \sqrt{\frac{14}{5}}$

$(x, y) = (\frac{1}{2}(1+i\sqrt{7}), 1)$ $f^2 = 2a < 2\sqrt{\frac{7}{10}} = \sqrt{\frac{14}{5}}$

2. $2a^2 \geqq 1 + b\bar{b},\ 2a^2 \geqq 1 + a^2\frac{4}{7}\gamma^2,\ a > \sqrt{\frac{7}{14-4\gamma^2}}$

$(x, y) = (1, 0)$ $\qquad f^2 = a \leqq \sqrt{\frac{7}{3}} < \sqrt{\frac{14}{5}}$

$(x, y) = (0, 1)$ $\qquad f^2 \leqq \sqrt{\frac{28}{14-4\gamma^2}} \leqq \sqrt{\frac{14}{5}}$

und $\sqrt{\frac{7}{10}}\,|\,x + \frac{1}{2}(1 + i\frac{3}{\sqrt{7}})\,y|^2 + \sqrt{\frac{10}{7}}\,|\,y|^2 < \sqrt{\frac{14}{5}}$

gilt nur für $(x, y) = (1, 0)$.

4. Hermitesche Formen in $K(i\sqrt{2})$, $K(i\sqrt{11})$.

In diesem Abschnitt betrachten wir wie in 3. hermitesche Formen jetzt in den Körpern $K(i\sqrt{2})$ und $K(i\sqrt{11})$. Diese unterscheiden sich von den bisher behandelten dadurch, daß hier $M_2 = M_1$ ist. Wir beweisen zunächst:

Satz 5: Für hermitesche Formen in $K(i\sqrt{2})$ ist $M_2^2 = M_1^2 = 2$. Natürlich gibt es dann Formen mit $m_2^2 = 2$.

Beweis: Wir können hier annehmen (*Perron*, loc. cit.), daß a Minimum ist und $\left|\frac{\bar{b}}{a}\right| = \gamma\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0 \leqq \gamma \leqq 1,\ a \leqq \frac{1 + b\bar{b}}{a}$.

Dann trennen wir die Fälle:

1. $a \leqq \frac{2}{3}$.

Für $(x, y) = (1, 0)$ ist $f^2 = a \leqq \frac{2}{3} \leqq 2$.

Für $(x, y) = (i\sqrt{2}, 0)$ ist $f^2 = 2a \leqq \frac{4}{3} \leqq 2$.

2. $\frac{2}{3} < a \leqq 2$.

Für $(x, y) = (1, 0)$ ist $f^2 = a \leqq 2$.

Für $(x, y) = (0, 1)$ ist $f^2 = \frac{1}{a} + a \left| \frac{\bar{b}}{a} \right|^2 \leqq \frac{1}{a} + \frac{3}{4} a \leqq 2$.

Satz 6: Für hermitesche Formen in $K(i\sqrt{11})$ ist $M_2^2 = M_1^2 = \sqrt{\frac{11}{2}}$.

Beweis: Wieder nehmen wir an, daß a bereits Minimum sei und daß, (*Perron*, loc. cit.)

$$\left| \frac{\bar{b}}{a} \right| = \gamma \frac{3}{\sqrt{11}}, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1.$$

Hier unterscheiden wir die Fälle:

1. $a \leqq \frac{\sqrt{22}}{9}$.

Für $(x, y) = (1, 0)$ ist $f^2 = a \leqq \frac{\sqrt{22}}{9} < \sqrt{\frac{11}{2}}$

Für $(x, y) = (\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11}), 0)$ ist $f^2 = 3a \leqq \frac{\sqrt{22}}{3} < \sqrt{\frac{11}{2}}$.

2. $\sqrt{\frac{11}{2}} \geqq a > \frac{\sqrt{22}}{9}$

$(x, y) = (1, 0)$ $\quad f^2 = a \leqq \sqrt{\frac{11}{2}}$

$(x, y) = (0, 1)$ $\quad f^2 \leqq \frac{1}{a} + a \frac{9}{11} \leqq \sqrt{\frac{11}{2}}$.

5. M_k für quadratische Formen.

Wir zeigen folgenden

Satz 7: Die quadratische Form $f^2 = a x^2 + 2 b x y + c y^2$ sei positiv definit und $ac - b^2 = 1$. Dann gibt es jedenfalls für $k > C$ (C von f unabhängige Konstante) immer k-Gitterpunktpaare, für die $f^2 \leqq \leqq k^2 (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ ist.

Es gibt für jedes k eine Form, bei der für höchstens $k - 1$ Gitterpunktpaare $f^2 < k^2 (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ ist.

Beweis: Die Form

$$(k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \ (x^2 + xy + k^2 y^2)$$

erfüllt die im zweiten Teil der Behauptung genannte Bedingung.

Für den Beweis des ersten Teiles nehmen wir die Form als reduziert an: $0 \leqq b \leqq \frac{a}{2}$, $a \leqq c$. Wir ordnen dann der Form ihr Gitter zu. Die Behauptung besagt dann, daß im Bereich B

$$f^2 \leqq k^2 (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}, \ x > 0, \ y \geqq 0$$

$$f^2 \leqq k^2 (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}, \ x \leqq 0, \ y > 0.$$

für genügend großes k mindestens k-Gitterpunkte liegen. Wir ordnen jedem Gitterpunkt (x, y) das Parallelogramm mit den Ecken (x, y) $(x, y+1)$ $(x-1, y+2)$ $(x-1, y+1)$ zu. Wir setzen noch $\sqrt{a} = L$, $k^2 (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = r^2$ und bezeichnen mit K den Kreisbereich $f^2 \leqq r^2$. Dann betrachten wir die Parallelogramme, die Gitterpunkten außerhalb K entsprechen, soweit sie in der Halbebene $y \geqq 0$ liegen. Wegen der Reduktionsbedingung haben die Punkte solcher Parallelogramme von 0 mindestens den Abstand $r - L$. Nun betrachten wir die Gitterpunkte, die zu B gehören und dazu noch die Gitterpunkte mit $y = 0$ und $y = -1$.

Die zu ihnen gehörigen Parallelogramme überdecken nach dem Gesagten den zu B ähnlichen, im Verhältnis $(r - L) : r$ verkleinerten Bereich. Sein Inhalt ist $\frac{\pi}{2} (r - L)^2$. Wenn mit A die Anzahl der Gitterpunkte in B bezeichnet wird, so ist

$$A \geqq (r - L)^2 \frac{\pi}{2} - 2 \frac{r}{L} > r^2 \frac{\pi}{2} - r (L\pi + \frac{2}{L})$$

Das zweite Glied rechts rührt von den Gitterpunkten auf $y = 0$ und $y = -1$ her, soweit die ihnen zugeordneten Parallelogramme an der Überdeckung des eben genannten Bereiches beteiligt sind.

Es ist also

$$A \geqq r^2 > k$$

wenn nur

$$(\frac{\pi}{2} - 1)\, r + (L\pi + \frac{2}{L}) \geqq 0$$

Daraus folgt für L die Schranke

$$\frac{2\beta}{\alpha r + \sqrt{\alpha^2 r^2 - 4\beta}} \leqq L \leqq \frac{1}{2}(\alpha r + \sqrt{\alpha^2 r^2 - 4\beta}), \qquad \alpha = \frac{\pi - 2}{2\pi}, \quad \beta = \frac{2}{\pi}$$

Weiter ist

$$\lim_{r \to \infty} r \frac{2\beta}{\alpha r + \sqrt{\alpha^2 r^2 - 4\beta}} = \frac{4}{\pi - 2} < 4$$

Es gibt also ein C_1 so, daß für $k > C_1$ der linke Teil der obigen Ungleichung schon aus $4 \leqq L r$ folgt. Der rechte Teil ist etwa für $k > C_2$ gültig, da ja für jede Form f $L = \sqrt{a} \leqq \sqrt{\frac{4}{3}}$ ist.

Wir erhalten also $A \geqq k$, wenn $k >$ Max (C_1, C_2) und $L r \geqq 4$.

Wir setzen noch $L = \frac{1}{\gamma r}$. Dann ist die Behauptung also für $\gamma \leqq \frac{1}{4}$ bewiesen.

Nun betrachten wir noch den Fall $\gamma < \frac{1}{4}$ und trennen hier die Fälle:

1. $\gamma > (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} k^{-1} = \gamma_0$; 2. $\frac{1}{2} < \gamma \leqq \gamma_0$; 3. $\frac{1}{3} < \gamma \leqq \frac{1}{2}$;

4. $\frac{1}{4} < \gamma \leqq \frac{1}{3}$. In den ersten beiden Fällen wird der Bereich B nur von den Gittergeraden $y = 0$ und $y = 1$ geschnitten, im dritten kommt dazu noch $y = 2$, im vierten zu diesen noch $y = 3$.

1. Hier ist $A \geqq \left[\frac{r}{\frac{1}{\gamma r}}\right] = [\gamma r^2] \geqq [\gamma_0 r^2] = k$.

2. Hier ist $A \geqq \left[\frac{r}{\frac{1}{\gamma r}}\right] + \left[\frac{2r\sqrt{1-\gamma^2}}{\frac{1}{\gamma r}}\right] > r^2(\gamma + 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}) - 2 \geqq r^2(\gamma_0 + 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}) - 2 = k - 1$

also $A \geqq k$.

3. $$A \geqq \left[\frac{r}{\frac{1}{\gamma r}}\right] + \left[\frac{2r\sqrt{1-\gamma^2}}{\frac{1}{\gamma^2}}\right] + \left[\frac{2r\sqrt{1-4\gamma^2}}{\frac{1}{\gamma r}}\right]$$

$$> r^2\gamma\,(1 + 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} + 2\sqrt{1-4\gamma^2}) - 3.$$

Sei $f(\gamma) = \gamma(1 + 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} + 2\sqrt{1-4\gamma^2})$. Dann ist $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{3})$.

Außerdem geht im Intervall $\frac{1}{3} \leqq \gamma \leqq \frac{1}{2}$ $f'(\gamma)$ von positiven Werten durch eine Nullstelle zu negativen Werten über. Also ist das Minimum von f bei $\gamma = \frac{1}{2}$.

Sein Wert ist $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) > 1$. Also ist etwa für $k > C_3$

$$A \geqq r^2 \geqq k.$$

4. Ebenso wie bei 3. folgt

$$A > r^2\gamma\,(1 + 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} + 2\gamma\sqrt{1-4\gamma^2} + 2\gamma\sqrt{1-9\gamma^2}) - 4$$

und

$$A \geqq r^2 \geqq k \text{ etwa für } k > C_4$$

also insgesamt, wenn $C = \operatorname{Max} C_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$,

$$A \geqq k \text{ für } k > C.$$ w. z. z. w.

Symmetric Linear Operators on a Banach Space.

By
F. V. Atkinson, Ibadan, Nigeria.

(Received May 3, 1949.)

1.

Among the simpler applications of the analytical machinery of *Hilbert* space is that to the symmetrical integral equation of the second kind, associated with the names of *Hilbert* and *E. Schmidt*. This equation has the general form

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x),$$

where the kernel $K(x, y)$ has the property

$$K(x, y) = K(y, x)$$

and is suitably continous. The principal results of the theory, apart from the general results of Fredholm, are the expansion theorem and the mutual orthogonality of the eigen-functions[1].

From the *Hilbert* space point of view this is a case of the spectral theory of a linear operator which is both symmetric and totally continuous. An essential feature of *Hilbert* space is however the *Hermitian* inner product, which occurs throughout the investigation of the symmetrical integral equation, and is indeed required in order to define the concepts of orthogonal functions and a symmetric operator. My aim in this paper is to shew that most of the results of the theory can be achieved without the use of the inner product.

The contents of this paper may be summarised as follows: §§ 2—3, extension to spaces without inner product of the terms „orthogonality", „symmetric operator"; §§ 4—5, establishment of the orthogonality of

[1] For accounts of this theory from various points of view reference may be made to (1) Modern Analysis, by *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, (4th edition, Cambridge, 1927), 223—229; (2) Methoden der Mathematischen Physik, I, by *R. Courant* and *D. Hilbert* (Springer, Berlin, 1931), 104—118; (3) Theory of Lie Groups, I, by *C. Chevalley* (Princeton, 1946), 205—209.

the eigen-functions, when such exist; §§ 6—7, relevant parts of the spectral theory of a totally continuous operator; § 8, proof of the expansion theorem; § 9, an expression for the Fredholm radius of a symmetric operator; § 10, certain other properties of symmetric operators; § 11, connection with the theory of rings. Finally in § 12 I give a simple example to show that the theory here given is not included in theories based on spaces with inner product.

2.

For normed spaces with inner product, denoted by (f, g) where f and g are a pair of elements of the space, a symmetric operator U is characterised by the requirement

$$(Uf, g) = (f, Ug) \tag{2,1}$$

for any pair of elements f and g. To derive from this a property which shall retain its significance in a space of Banach's type we proceed as follows. For any element f we have

$$(f, U^2 f) = (Uf, Uf) = \| Uf \|^2$$

and also, by a fundamental property of the inner product,

$$|(f, U^2 f)| \leqq \| f \| \cdot \| U^2 f \|,$$

so that for any element f of the space

$$\| Uf \|^2 \leqq \| f \| \cdot \| U^2 f \|. \tag{2,2}$$

It is this property which we take as extending the concept of a symmetric operator to a *Banach* space. It is not difficult to see that in *Hilbert* space the property (2,2) also holds in the more general case of a normal operator, that is to say one which commutes with its adjoint.

For spaces with inner product it is clear that if two operators have the property (2,1), then so has their sum. If further they commute, then their product has the same property. Thus if the operator U satisfies (2,1), then so does any polynomial in U. It does not seem that the same holds good for operators which satisfy (2,2), so that some assumption in this direction will be necessary.

In the sequel I confine myself to linear operators on a complex space of *Banach*'s type, and list for future reference the following special types of such operators:

(A) The operator U is such that for every element f of the space,

$$\| Uf \|^2 \leqq \| f \| \cdot \| U^2 f \|.$$

(B) The operator U is such that every polynomial in U with constant complex coefficients has the property (A).

Under such conditions I say that the operator U satisfies condition (A), or (B), as the case may be.

I need also the concept of a totally continuous operator. The operator U will be said to be totally continuous if it transforms any bounded sequence of elements of the space into a sequence which contains a convergent subsequence. The linear operator given by a *Fredholm* kernel falls within this category if it is continuous, or satisfies certain more general conditions of this type.

3.

In spaces with an inner product two elements are said to be orthogonal when their inner product vanishes. For such spaces orthogonality is a reflexive relation; it is also a linear relation, in that the elements which are orthogonal to a given element form a linear manifold.

Orthogonality is extended to *Banach* spaces by minimising a distance. We say that the element f is orthogonal to the element g if

$$\| f + \lambda g \| \geqslant \| f \|$$

for all real or complex values of the scalar λ. It will not in general be the case that g is also orthogonal to f, nor is the relationship in general a linear one. However it will appear that such results may be established for the eigen-functions of a symmetric operator, in the sense of conditions (A) and (B).

4.

I now show that if such operators have eigen-functions, then these eigen-functions have certain properties of orthogonality. I need the following:

Lemma 1. *If the bounded linear operator U satisfies condition (A), then*

$$\frac{\| U f \|}{\| f \|} \leqslant \lim_{m \to \infty} \| U^m f \|^{1/m}.$$

It follows from condition (A) that

$$\frac{\| U^{m+1} f \|}{\| U^m f \|} \leqslant \frac{\| U^{m+2} f \|}{\| U^{m+1} f \|},$$

while since U is a bounded operator

$$\frac{\| U^{m+1} f \|}{\| U^m f \|} \leqslant \| U \|.$$

Hence

$$\frac{\| U^{m+1} f \|}{\| U^m f \|} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

is a bounded increasing sequence which tends to a limit as m tends to ∞. We have also

$$\| U^m f \| = \| f \| \cdot \prod_{n=0}^{m-1} \frac{\| U^{n+1} f \|}{\| U^n f \|}.$$

The result now follows easily.

We have now

Theorem I. *If the bounded linear operator U satisfies condition (A), then an eigen-function of U is orthogonal to any linear combination of eigen-functions for which the eigen-values are of lesser absolute value.*

Let the eigen-functions be $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, so that

$$U f = \lambda f,$$
$$U \varphi_r = \mu_r \varphi_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

where the μ 's are all less in absolute value than λ. Let g be a linear combination of the φ 's of the form

$$g = \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r$$

where the c 's are complex scalars. What we have to prove is that

$$\| f + g \| \geqslant \| f \|$$

Applying Lemma 1 we note that

$$\lambda^{-m} U^m (f + g) = f + \sum_{r=1}^{n} c_r \left(\frac{\mu_r}{\lambda}\right)^m \varphi_r \to f, \text{ as } m \to \infty,$$

since the quantities

$$\left| \frac{\mu_r}{\lambda} \right| \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

are all less than unity. Hence

$$\lim_{m \to \infty} \| U^m (f + g) \|^{1/m} = |\lambda|$$

The lemma now shows that

$$\| U (f + g) \| \leqslant |\lambda| \, \| (f + g) \|,$$

so that

$$\| f + g \| \geqslant \| f + \sum_{r=1}^{n} c_r \left(\frac{\mu_r}{\lambda} \right) \varphi_r \|.$$

Repeated application of this result gives

$$\| f + g \| \geqslant \| f + \sum_{r=1}^{n} c_r \left(\frac{\mu_r}{\lambda} \right)^m \varphi_r \|$$

$$\geqslant \| f \| - \sum_{r=1}^{n} | c_r | \cdot | \frac{\mu_r}{\lambda} |^m \| \varphi_r \|$$

for any positive integer m. Making m tend to ∞ we get

$$\| f + g \| \geqslant \| f \|$$

which is the required result.

5.

A stronger form of orthogonality may be shown to hold for the eigen-functions under condition (B). We have

Theorem II. *Let U be a bounded linear operator which satisfies condition (B), and let $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ be eigen-functions of U of which no two are associated with the same eigen-value. Then if $c_1, \ldots, c_n$ and $d_1, \ldots, d_n$ are complex scalars such that*

$$| c_r | \geqslant | d_r | \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

we have

$$\| \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \| \geqslant \| \sum_{r=1}^{n} d_r \varphi_r \|$$

In particular, any two eigen-functions which correspond to different eigen-values are mutually orthogonal.

Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the eigen-values so that

$$U \varphi_r = \lambda_r \varphi_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

and the λ 's are all distinct.

We observe first the well-known fact that no expression of the form

$$\sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r$$

can vanish, unless all the terms $c_1 \varphi_1, \ldots, c_n \varphi_n$ vanish. For suppose that we had

$$\sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r = 0.$$

It would then follow that

$$\prod_{r=2}^{n} (\lambda_r - U) \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r = 0,$$

so that

$$\prod_{r=2}^{n} (\lambda_r - \lambda_1)\, c_1 \varphi_1 = 0.$$

Hence $c_1 \varphi_1 = 0$, and similarly for the other terms $c_r \varphi_r$.

In proving Theorem II it will be sufficient to prove

$$\| \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \| \geqslant \| \sum_{r=1}^{n-1} c_r \varphi_r + d_n \varphi_n \|$$

if $| d_n | \leqq | c_n |$. We determine a polynomial $f(\lambda)$ such that

$$f(\lambda_r) = 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$c_n f(\lambda_n) = d_n.$$

Under condition (B) the operator $f(U)$ will satisfy condition (A), so that by Lemma 1 we have

$$\frac{\| f(U) \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \|}{\| \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \|} \leqq \lim_{m \to \infty} \| \{f(U)\}^m \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \|^{1/m}.$$

But

$$\{f(U)\}^m \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r = \sum_{r=1}^{n-1} c_r \varphi_r + c_n \left(\frac{d_n}{c_n}\right)^m \varphi_n$$

and hence

$$\| \{f(U)\}^m \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \|^{1/m} \to 1$$

as $m \to \infty$. Hence

$$\| f(U) \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \| \leqslant \| \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \|,$$

which proves Theorem II.

We note the corollorary that the value of

$$\| \sum_{r=1}^{n} c_r \varphi_r \|$$

is determined by the absolute values

$$| c_r |, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

6.

I turn now to the question of whether eigen-values and eigen-functions actually exist; I consider in fact the solubility of the equation

$$\lambda f - U f = g,$$

where g is given and f is to be found. Values of the complex scalar λ for which

$$(\lambda I - U)^{-1}$$

exists as a bounded operator are said belong to the resolvent set; values of λ for which

$$\lambda f - U f = 0$$

has a non — trivial solution are said to be eigen-values.

I collect here, with abbreviated proofs, some more or less well — known results on these topics.

Lemma 2. *If U is a bounded operator then the region $|\lambda| > \|U\|$ consists of points of the resolvent set.*

We have in fact, for such values of

$$(\lambda I - U)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \frac{U}{\lambda})^{-1} = \lambda^{-1}(I + \sum_{n=1}^{\infty} U^n \lambda^{-n}). \tag{6,1}$$

Lemma 3. *If U is a bounded operator then the resolvent set is open.*

If λ_0 is a point of the resolvent set, then in the neighbourhood of λ_0

$$\begin{aligned}(\lambda I - U)^{-1} &= \{\lambda_0 I - U - (\lambda_0 - \lambda) I\}^{-1} \\ &= \{(\lambda_0 I - U)(I - (\lambda_0 - \lambda) I (\lambda_0 I - U)^{-1})\}^{-1} \\ &= (\lambda_0 I - U)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 I - U)^{-n} (\lambda_0 - \lambda)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 I - U)^{-n} (\lambda_0 - \lambda)^{n-1} \end{aligned} \tag{6,2}$$

the series being convergent if

$$|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - U)^{-1}\|^{-1}$$

Lemma 4. *If U is totally continuous then a convergent sequence of values of the resolvent set which does not converge to zero tends either to a value of the resolvent set or to an eigen-value.*

Let λ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ be a sequence of values belonging to the resolvent set, such that $\lambda_n \to \lambda_0$, $(\lambda_0 \neq 0)$. There are two possibilities to be considered: —

(*i*) $(\lambda_n I - U)^{-1}$ bounded as $n \to \infty$.

In this case λ_0 is a point of the resolvent set. For, as in the proof Lemma 3, the region

$$|\lambda - \lambda_n| < \|(\lambda_n I - U)^{-1}\|^{-1}$$

consists of points of the resolvent set, and if $\lambda_n - \lambda_0$ is sufficiently small this region will include λ_0.

The argument in fact shows rather more, namely that if $\|(\lambda_n I - U)^{-1}\|^{-1}$ tends to infinity, then $(\lambda_0 - \lambda_n)\|(\lambda_n I - U)^{-1}\|$ cannot tend to zero.

(*ii*) $\|(\lambda_n I - U)^{-1}\|$ tends to ∞, at any rate for some sequence of values of n.

In this case λ_0 is an eigen-value. For by hypothesis there are sequences of elements f_n, g_n such that

$$\|g_n\| = 1, \|f_n\| \to \infty, \lambda_n f_n - U f_n = g_n.$$

Writing

$$h_n = f_n \|f_n\|^{-1}$$

we have

$$\|h_n\| = 1, \lambda_n h_n - U h_n \to 0.$$

Since $\{h_n\}$ is a bounded sequence and U is totally continuous the sequence $\{U h_n\}$ contains a convergent subsequence. If h be the limit of such a sequence then it is easily seen that h is such that

$$\|h\| = 1, \lambda_0 h - U h = 0,$$

so that λ_0 is an eigen-value, as was to be proved.

Lastly we need

Lemma 5. *If U is totally continuous, then the eigen-values have no limit-point other than zero.*

I prove this result under the additional assumption that satisfies condition (B)[2]. Suppose in fact that $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \ldots$ is a sequence of eigen-values such that λ_n does not tend to zero. Then if $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ is a corresponding sequence of eigen-functions, such that

$$\|\varphi_n\| = 1, \lambda_n \varphi_n = U \varphi_n,$$

then

$$\lambda_n^{-1} \varphi_n$$

is a bounded sequence, so that the sequence

---

[2] The proof of the result without this additional assumption is due to *F. Riesz*. Acta Math., 41 (1918), 71—98. Reference may also be made to *S. Banach*, Operations Lineaires (Warsaw, 1932), Ch. 10.

$$\{U \lambda_n^{-1} \varphi_n\} \text{ or } \{\varphi_n\}$$

must contain a convergent subsequence. But this is impossible since the eigen-functions $\{\varphi_n\}$ are by Theorem 2 mutually orthogonal.

In fact if φ_m, φ_n are any two of them we have

$$\begin{aligned} \| \varphi_m - \varphi_n \| &\geqslant \| \varphi_m \| \\ &= 1. \end{aligned}$$

In sum, these lemmas show that if U is totally continuous then the resolvent exists for all λ, with the possible exception of a bounded and denumerable sequence with $\lambda = 0$ as its only possible limit-point. For by Lemma 2 the resolvent exists outside a certain circle. If then it were bounded on the inside it could not be so bounded by points of the resolvent set, in view of Lemma 3, nor by eigen-values in view of Lemma 5, nor by points of any other kind in view of Lemma 4.

7.

Now let U satisfy condition (B), and let λ_1, λ_2, ... be isolated singularities of the resolvent, if such singularities exist; if of course U is totally continuous then all the singularities are isolated and are eigen-values, except for the origin. In this paragraph I introduce the corresponding projection operators P_1, P_2, ...

The resolvent is necessarily one-valued where it exists; that where it exists it is analytic follows from the power-series development of Lemma 3. It follows that in the neighbourhood of each such isolated singularity, λ_n say, there is a development as a Laurent series of the form[3]

$$(\lambda I - U)^{-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn} (\lambda - \lambda_n)^n$$

where $A_{m\,n}$ has a representation

$$A_{m\,n} = \frac{1}{2\pi i} \int (\lambda I - U)^{-1} (\lambda - \lambda_n)^{-m-1} \, d\lambda$$

so that the $A_{m\,n}$ are bounded linear operators. We have then

$$(\lambda I - U) \sum_{-\infty}^{\infty} A_{m\,n} (\lambda - \lambda_n)^m \equiv I$$

[3] The observation that complex-variable theory may be used in this manner is due to *F. Riesz*, „Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues" (Paris, 1913), p. 116—120.

so that

$$(\lambda_n I - U) A_{m\,n} + A_{m-1,\,n} = 0, \qquad (m \neq 0)$$
$$(\lambda_n I - U) A_{0,\,n} + A_{-1,\,n} = \mathrm{I},$$

and similarly

$$A_{m\,n} (\lambda_n I - U) + A_{m-1,\,n} = 0, \qquad (m \neq 0),$$
$$A_{0,\,n} (\lambda_n I - U) + A_{-1,\,n} = \mathrm{I}.$$

We have therefore, for $m \leqslant -1$,

$$A_{m\,n} = (U - \lambda_n I)^{-1-m} A_{-1,\,n}.$$

If then U satisfies conditions (B) and f is an element of the space then the sequence

$$\frac{\| A_{m-1,\,n'} f \|}{\| A_{m,\,n} f \|} \qquad (m = -1, -2, \ldots)$$

is therefore an increasing sequence, so that

$$\frac{\| A_{m-1,\,n} f \|}{\| A_{m,\,n} f \|} \geqslant \frac{\| A_{-2,\,n} f \|}{\| A_{-1,\,n} f \|}$$

for $m \leqslant -1$. But on the other hand the Laurent series

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{m\,n} (\lambda - \lambda_0)^m$$

is convergent for sufficiently small values of $|\lambda - \lambda_0|$. This gives a contradiction unless

$$\| A_{-2,\,n} f \| = 0.$$

Hence, for $m \leqslant -2$,

$$A_{m\,n} = 0.$$

Hence

Theorem 3. *If the bounded linear operator U satisfies condition (B), then the isolated singularities of the resolvent are simple poles. If further U is totally continuous then all the singularities of the resolvent, except $\lambda = 0$, are simple poles.*

Following the usual notation we write P_n for $A_{-1,\,n}$, so that

$$(\lambda_n I - U) P_n = P_n (\lambda_n I - U) = 0.$$

It follows that for any element f, $P_n f$ is an eigen-function. Hence

Theorem IV. *If the bounded linear operator U satisfies condition (B), then any isolated singularity of the resolvent is an eigen-value.*

To establish the known fact that P_n is a projection operator we observe that

$$A_{0,n}(\lambda_n I - U) + P_n = I,$$
$$(\lambda_n I - U) P_n = 0.$$

Multiplying the first of these on the right by P_n and using the second we get

$$P^2_n = P_n,$$

as required.

Lastly we have to establish the mutual orthogonality of these projection operators, by which we mean

$$P_r P_s = 0, \qquad (r \neq s).$$

To prove this we note that

$$(\lambda_r I - U) P_r = P_r (\lambda_r I - U) = 0,$$
$$(\lambda_s I - U) P_s = P_s (\lambda_s I - U) = 0,$$

whence

$$(\lambda_r I - U) P_r P_s = 0,$$
$$(\lambda_s I - U) P_r P_s = P_r (\lambda_s I - U) P_s = 0.$$

It now follows by subtraction that

$$(\lambda_r - \lambda_s) P_r P_s = 0,$$

which proves the result.

8.

We are now in a position to establish the expansion theorem. We use the evident fact that the set of operators which satisfy condition (A) is closed, from which it follows that if the operator U satisfies condition (B), then any element in the norm-closure, S say, of polynomials in U also satisfies condition (A). But by (6,1) the resolvent belongs to S at any rate for $|\lambda| > ||U||$. The possibility of analytic continuation by power series, as given by (6,2), shows that the resolvent belongs to S for all values of which can be reached by analytic continuation from a point for which the resolvent belongs to S. Thus the resolvent belongs to S for all values of λ which can be joined to a point lying outside the circle

$$|\lambda| = ||U||$$

by a path lying entirely in the resolvent set.

We are particularly concerned with the case in which the spectrum is discrete, with $\lambda = 0$ as the only possible limit point; this is of course the case if U is totally continuous. In this case the resolvent belongs

to S at all points in the λ-plane at which it exists. It follows that the projection operator P_n associated with any eigen-value λ_n also belongs to S. For we have the representation

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int (\lambda I - U)^{-1} d\lambda$$

taken round a suitable contour lying entirely in the resolvent set. Here the integrand belongs to S, and so also must P_n.

The fact that P_n belongs to S shows that for any element f,

$$\| P_n f \|^2 \leqslant \| f \| \cdot \| P_n^2 f \|.$$

But $P_n^2 = P_n$, whence

$$\| P_n f \| \leqslant \| f \|.$$

More generally, let $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_r}$ be any set of projection operators associated with distinct eigen-values of U. Then

$$P_{n_1} + P_{n_2} + \ldots + P_{n_r}$$

belongs to S, and also, by the orthogonality property,

$$(P_{n_1} + P_{n_2} + \ldots + P_{n_r})^2 = (P_{n_1} + P_{n_2} + \ldots + P_{n_r}).$$

Hence, by the above argument,

$$\| P_{n_1} + P_{n_2} + \ldots + P_{n_r} \| \leqslant 1.$$

In the same way it may be shown that

$$\| I - P_{n_1} - P_{n_2} - \ldots - P_{n_r} \| \leqslant 1. \tag{8,1}$$

Now, still supposing that the spectrum of U is discrete, with the origin as the only possible limit-point, let the eigen-values be arranged in order so that

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \ldots$$

Let φ be an element of the form

$$f - \sum_{r=1}^{n} P_r f$$

or, what comes to the same thing, an element such that

$$P_r \varphi = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{8,2}$$

I wish to show that

$$\| U \varphi \| \leqslant |\lambda_{n+1}| \, \| \varphi \|.$$

In view of (8,2) the function

$$(\lambda I - U)^{-1} \varphi$$

is regular at the points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. We have also, for $|\lambda| > \|U\|$,

$$(\lambda I - U)^{-1} \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} U^m \varphi,$$

so that

$$U^m \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int \lambda^m (\lambda I - U)^{-1} \varphi \, d\lambda,$$

and here the contour of integration may be taken to be the circle $|\lambda| = p$, where p is any number greater than $|\lambda_{n+1}|$, since the integrand is regular on and outside such a circle. Hence, keeping p fixed and making n tend to infinity, we get

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \|U^m \varphi\|^{1/m} \leqslant p.$$

Since p was any number greater than $|\lambda_{n+1}|$ this gives

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \|U^m \varphi\|^{1/m} \leqslant |\lambda_{n+1}| \, \|\varphi\|.$$

If now we apply Lemma 1 we get

$$\|U \varphi\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \, \|\varphi\|,$$

as required.

This result may be written

$$\|U f - \sum_{r=1}^{n} U P_r f\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \, \|f - \sum_{r=1}^{n} P_r f\|$$
$$\leqslant |\lambda_{n+1}| \, \|f\|, \text{ by (8,1).}$$

In this we make $n \to \infty$ and remember that then $\lambda_{n+1} \to 0$. This gives

$$U f = \sum_{r=1}^{\infty} U P_r f$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} P_r U f$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r P_r f.$$

Summing up we have the following expansion theorem.

Theorem V. *If the bounded linear operator U satisfies condition (B), and has a discrete spectrum with no limit-point but the origin (or, in particular, is totally continuous), then there is a denumerable set of projection operators $P_1, P_2, \ldots$ such that*

$$P_r^2 = P_r,$$
$$P_r P_s = 0, \qquad (r \neq s)$$
$$\|P_r\| = 1,$$

and such that for any element g of the form $U f$

$$g = \sum_{r=1}^{\infty} P_r g$$

or, in other words, such that,

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r P_r,$$

the series being convergent in the norm of operators.

In the case when U is totally continuous we have of course the additional fact that $P_1, P_2, \ldots$ are finite-dimensional.

9.

Theorem V extends to some extent to the case in which the spectrum of U is only partly discrete. Let p_1 be the least number such that for $|\lambda| > p_1$, $(\lambda I - U)^{-1}$ has no singularities other than poles, and such that the projection operators associated with these poles are finite-dimensional. Thus p_1 is the least number such that for $|\lambda| > p_1$ the non-determinantal results of Fredholm hold; p_1 is in fact the reciprocal of the Fredholm-radius, a concept due to *J. Radon*[4].

Theorem VI. *Let U be a bounded linear operator which satisfies condition (B), and let P be any finite-dimensional projection operator which commutes with U. Then*

$$p_1 = \text{g. l. b. } \| U (I - P) \|$$

where P ranges over all such operators.

Taking any positive number ε, let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the poles of $(\lambda I - U)^{-1}$ for which $|\lambda| \geqslant p_1 + \varepsilon$. Let $P_1, P_2, \ldots, P_n$ be the associated projection operators. The argument of § 8 then shows that

$$\| U (I - P_1 - P_2 - \ldots - P_n) \| \leqslant |\lambda_{n+1}|,$$

where $|\lambda_{n+1}|$ is the absolute value of the singularity of

$$(\lambda I - U)^{-1}$$

with greatest absolute value in the circle $|\lambda| < p_1 + \varepsilon$. It follows that

$$\text{g. l. b. } \| U (I - P) \| \leqslant p_1.$$

Suppose if possible that we could find a finite-dimensional operator P, commuting with U, such that

$$\| U (I - P) \| = p_0 < p_1.$$

---

[4] Wiener Sitzungsberichte, IIa, **128** (1919), 1083—1121.

Then

$$(\lambda I - U)^{-1}(I - P) = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} U^n \lambda^{-n} (I - P)$$
$$= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \{U(I - P)\}^n \lambda^{-n}$$

would be regular for $|\lambda| > p_0$. Thus the equation

$$\lambda f - U f = g$$

could be resolved into the two equations

$$(\lambda I - U)(I - P) f = (I - P) g,$$
$$(\lambda I - U) P f = P g,$$

of which the first is soluble for $|\lambda| > p_0$, and the second is a finite-dimensional equation. Thus for $|\lambda| > p_0$ the non-determinantal results of Fredholm would hold. Thus the supposition $p_0 < p_1$ contradicts our hypothesis concerning p_1 .

10.

It is to some extent possible to establish converses of the results of § 8. Thus

Theorem VII. *Let U be a bounded linear operator satisfying condition (B). Then the necessary and sufficient condition that U should be expressible in the form of a convergent series*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r P_r,$$

where the P_r are finite-dimensional projection operators, is that U should be totally continuous.

That the condition is sufficient follows from Theorem V. Let us prove that it is necessary.

We have to prove that the operator

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r P_r$$

is totally continuous, the P_r being finite-dimensional. This reduces to the result that the limit of a convergent sequence of finite-dimensional operators is totally continuous. This in turn follows from the known result that the set of totally continuous operators is closed.

The latter statement is easily proved by the method of diagonal selection. Let $U_1, U_2, \ldots$ be a sequence of totally continuous linear operators tending to U. Let $f_1, f_2, \ldots$ be a bounded sequence of elements. We have to prove that the sequence

$$U f_1, U f_2, \ldots$$

contains a convergent subsequence.

We observe that there will be a subsequence $f_{11}, f_{12}, \ldots$ of $f_1, f_2, \ldots$ such that

$$U_1 f_{11}, U_1 f_{12}, \ldots$$

converges. Next we select a subsequense $f_{21}, f_{22}, \ldots$ of $f_{11}, f_{12}, \ldots$ such that

$$U_2 f_{21}, U_2 f_{22}, \ldots$$

converges, and so on. Considering then the diagonal sequence it is easily verified that

$$U f_{n\,n}$$

satisfies the criterion for convergence. This proves the result, and also Theorem VII.

It seems doubtful whether every totally continuous operator on a Banach space is the limit of a sequence of finite-dimensional operators. However we have

Theorem VIII. *If a bounded linear operator satisfies condition (B), then the necessary and sufficient condition that it should be the limit of a sequence of finite-dimensional operators is that it should be totally continuous.*

The necessity has just been proved; the sufficienty has been proved in Theorem V.

Again it does not appear to be known whether a totally continuous operator on a Banach space is also totally continuous when considered as an operator on the operator space[5]. However

Theorem IX. *If the linear operator U satisfies condition (B), and is totally continuous, then it is also totally continuous on the space of bounded linear operators.*

For a finite-dimensional bounded linear operator is certainly totally continuous on the operator space. The result now follows from the fact that U is the limit of a sequence of finite-dimensional operators.

The *Riesz* theory of the totally continuous operator has been extended by writers who have considered the possibility that not U, but one of its iterates, U^n say, is totally continuous. However this extension

---

[5] It is however totally continuous on the adjoint space, see for instance Banach, loc. cit., p. 100.

does not apply to the present theory. It is easily verified directly that if U satisfies condition (A), and one of its iterates is totally continuous, then so also is U itself.

11.

The conditions (A), (B) and the condition of total continuity lend themselves naturally to a ring-theoretic interpretation. Thus condition (A) obviously implies that the operator U is not generalised nilpotent. Further, under condition (B) the ring of polynomials in U is a ring without radical.

Again, if U be totally continuous, the existence of a sequence of elements $f_1, f_2, \ldots$ such that

$$\| f_n \| = 1, \; U f_n - \lambda f_n \to 0$$

as $n \to \infty$, implies the existence of a sequence $g_1, g_2, \ldots$ such that

$$\| g_n \| = 1, \; U g_n - \lambda g_n = 0, \; \| f_n - g_n \| \to 0$$

as $n \to \infty$. We may express this by saying that an expression of the form $\lambda I - U$, where λ is not zero, cannot be a generalised null-divisor, except in so far as it is a proper null-divisor. We say that $\lambda I - U$ is then not a generalised null-divisor in the strict sense.

The latter condition may be put in other forms. Thus we may equally require that the operator $\lambda I - U$ map the space of elements into a closed set, or again require that the equation

$$U \varphi - \lambda \varphi = \psi$$

where ψ is a given element and φ an unknown element, should be „normally soluble" in the sense of *Hausdorff*[6].

Conditions such as these can be made into a foundation of the theory. It does not however seem sufficient to require that the operators which form the ring should not be generalised nilpotent. We impose the stronger condition that there should be a positive constant μ such that

$$\left\{ \frac{\| V^m f \|}{\| f \|} \right\}^{1/m} \geqslant \mu \, \frac{\| V f \|}{\| f \|} \tag{11,1}$$

[6] See *Banach*, loc. cit., p. 151, and *F. Hausdorff*, J. f. d. reine und angewandte Math., 167 (1932), pp. 294—311. Reference may also be made to a paper to appear in Mat. Sbornik (Recueil Math.), where I have considered normal solubility from a general point of view.

for any positive integer m and element f, where V is any operator of the ring.

We have then

Theorem X. *Let R be the ring formed by the norm-closure of polynomials in U, with complex scalar coefficients, where U is a bounded linear operator on a complex Banach space. Let U be such that any element V of R satisfies* (11,1), *where μ is a positive constant independent of V and f; furthermore let U be such that no expression of the form $I - \lambda U$ is a generalised null-divisor in the strict sense. Then the spectrum of U is discrete, except possibly at the origin, and U admits a representation of the form*

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r P_r$$

where the $P_1, P_2, \ldots$ are mutually orthogonal projection operators.

It may be noted that we cannot assert that these projection operators are finite-dimensional unless we assume that U is totally continuous. A simple „Gegenbeispiel" to this effect is given by taking as U the identity operator, I.

This expansion theorem may be compared with the decomposition of a ring without radical and with minimal condition into a direct sum of ideals, each generated by an idempotent element[7].

For the proof we observe that Lemmas 2, 3 and 4 may be established much as before. The proof of Lemma 5 for this case differs slightly. Suppose if possible that the eigen-values had a finite limit, other than zero, so that we have a set of elements φ_n and scalars λ_n such that

$$\| \varphi_n \| = 1, \lambda_n \varphi_n - U \varphi_n = 0, \lambda_n \to \lambda \neq 0,$$

as $n \to \infty$. Then we have

$$\| \varphi_n \| = 1, \lambda \varphi_n - U \varphi_n \to 0,$$

so that, since $\lambda I - U$ is not a generalised null-divisor in the strict sense, there is a sequence of elements ψ_n such that

$$\lambda \psi_n - U \psi_n = 0, \| \varphi_n - \psi_n \| \to 0, \tag{11,2}$$

as $n \to \infty$.

We show that this is impossible. For by hypothesis for all positive integers m and a certain fixed positive μ

---

[7] See for instance *van der Waerden*, „Moderne Algebra", Bd. II (Springer, 1940), §§ 116—118.

$$\left\{\frac{\|(\lambda I - U)^m(\varphi_n - \psi_n)\|}{\|\varphi_n - \psi_n\|}\right\}^{1/m} \geqslant \mu \frac{\|(\lambda I - U)(\varphi_n - \psi_n)\|}{\|\varphi_n - \psi_n\|}.$$

Hence

$$\left\{\frac{\|(\lambda - \lambda_n)^m \varphi_n\|}{\|\varphi_n - \psi_n\|}\right\}^{1/m} \geqslant \mu \frac{\|(\lambda - \lambda_n)\varphi_n\|}{\|\varphi_n - \psi_n\|}.$$

It follows that

$$|\lambda - \lambda_n| \geqslant \mu \frac{|\lambda - \lambda_n|}{\|\varphi_n - \psi_n\|},$$

whence

$$\|\varphi_n - \psi_n\| \geqslant \mu.$$

This contradicts (11,2). It has thus been proved that the spectrum is discrete, except possibly for a limitpoint at the origin.

The existence of the projection operators follows as in § 8. Again as in § 8, we get the results

$$\|I - P_{n_1} - P_{n_2} - \ldots - P_{n_r}\| \leqslant \frac{1}{\mu}$$

$$\|Uf - \sum_{r=1}^{n} U P_r f\| \leqslant \frac{|\lambda_{n+1}|}{\mu} \|f - \sum_{r=1}^{n} P_r f\|$$

$$\leqslant \frac{|\lambda_{n+1}|}{\mu^2} \|f\|,$$

from which the expansion theorem follows.

12.

It may be not without interest to give a simple example of orthogonality not associated with an inner product. Consider the space of pairs of complex numbers

$$f = (a, b)$$

with norm

$$\|f\| = \max(|a|, |b|),$$

and consider the operator U given by

$$Uf = (b, a).$$

In this case the eigen-functions have the form (a, a), $(b, -b)$. It is then easily verified that such eigen-functions are mutually orthogonal, with the above norm, in the Banach space sense of minimum

distance. This may be brought into connection with the fact that the above operator U satisfies condition (B) if we confine our attention to polynomials in U with real coefficients.

Such considerations may be extended to functions of a real variable. The expansion theorem then states the well-known fact that an arbitrary function can be expressed as the sum of an even and an odd function; the orthogonality property states that if a bounded odd function be added to a bounded even function, then the upper bound of the absolute value of the sum will be not less than the corresponding upper bound for either of the original functions.

Nichteuklidische Fußpunktkurven.

Von
Fr. Fabricius-Bjerre, Kopenhagen.

(Eingelangt am 10. Mai 1949.)

1. Im folgenden stellen wir zunächst einige wohlbekannte Sätze über Fußpunktkurven in der euklidischen Ebene zusammen. Diese Sätze werden dann auf eine Ebene mit nichteuklidischer Metrik übertragen, und schließlich betrachten wir Fußpunktkurven und Fußpunktflächen im euklidischen und nichteuklidischen Raum.

2. Unter der Fußpunktkurve eines Punktes A in bezug auf eine gegebene Kurve k versteht man bekanntlich den geometrischen Ort der Fußpunkte der Lote von A auf die Tangenten an k. Wir betrachten zunächst die *euklidische* Ebene. Die Tangente in einem Punkt P von k bezeichnen wir mit p, die Projektion von A auf p sei P_1. Der Pol P' der Geraden p in bezug auf einen beliebigen (reellen oder imaginären) Kreis c mit dem Mittelpunkt A ist zugleich der zu P_1 inverse Punkt in bezug auf diesen Kreis. Hieraus folgt, daß die Fußpunktkurve k_1 von A in bezug auf k die inverse Kurve der in bezug auf c polaren Kurve k' von k ist.

Ist k ein *Kegelschnitt* mit Mittelpunkt und A nicht Brennpunkt dieses Kegelschnittes, so ist die polare Kurve k' wieder ein Kegelschnitt und die Fußpunktkurve k_1 also eine rationale bizirkuläre Kurve 4. Ordnung mit dem Doppelpunkt A. Umgekehrt ist jede solche Kurve Fußpunktkurve für einen Kegelschnitt. Ist A speziell *Brennpunkt*, d. h. berühren die Geraden AI und AJ, wo I und J die unendlich fernen Kreispunkte sind, den Kegelschnitt k, so geht k' durch I und J, ist also ein Kreis, und die Fußpunktkurve k_1 ist dann ebenfalls ein Kreis. Dieser Kreis muß die auf der Brennpunktsachse liegenden Scheitel von k enthalten und k in diesen Punkten berühren. Infolgedessen hat der Kreis k_1 die Brennpunktsachse zum Durchmesser, und die beiden (reellen) Brennpunkte haben denselben Fußpunktkreis in bezug auf den gegebenen Kegelschnitt.

3. Wir betrachten nun eine *nichteuklidische Ebene*, deren absoluter Kegelschnitt φ imaginär oder reell ist, je nachdem eine elliptische oder hyperbolische Metrik vorliegt.

Wie oben sei p die Tangente im Punkte P an die Kurve k. Die nichteuklidische Senkrechte von A auf p enthält den Pol P' von p in bezug auf φ und schneidet p im Fußpunkt P_1. Wenn P die Kurve k durchläuft, durchläuft P' die in bezug auf φ polare Kurve k', und durch k' ist die Fußpunktkurve k_1 bestimmt, da P' und P_1 auf einer Geraden durch A liegen und in bezug auf φ konjugierte Punkte sind.

Diese letzte Transformation ist eine *projektive Inversion* mit dem Zentrum A. Führt man nämlich die Berührungspunkte R und S der Tangenten von A an φ durch eine Kollineation in die Kreispunkte der Ebene über, so geht φ in einen (reellen oder imaginären) Kreis über, dessen Mittelpunkt $\overline{A}$ dem Punkte A entspricht, und die den Punkten P' und P_1 entsprechenden Punkte sind invers in bezug auf diesen Kreis. Die projektive Inversion ist eine quadratische Verwandtschaft mit den Fundamentalpunkten A, R und S. Bezeichnen wir die den Kurven k und k_1 in der Kollineation entsprechenden Kurven mit $\overline{k}$ und $\overline{k}_1$, so muß die euklidische Fußpunktkurve von $\overline{A}$ in bezug auf $\overline{k}$ die Kurve $\overline{k}_1$ sein. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Die nichteuklidische Fußpunktkurve eines Punktes A in bezug auf eine Kurve k kann durch eine Kollineation in die euklidische Fußpunktkurve des A entsprechenden Punktes in bezug auf die k entsprechende Kurve übergeführt werden.*

Man sieht, daß dieser Satz auf zwei Tatsachen beruht, nämlich erstens, daß ein gewöhnlicher rechter Winkel, dessen einer Schenkel durch einen Punkt O geht, auch ein nichteuklidischer rechter Winkel ist, falls der absolute Kegelschnitt der nichteuklidischen Metrik ein Kreis mit dem Mittelpunkt O ist, und zweitens, daß man einen beliebigen Punkt der nichteuklidischen Ebene durch eine nichteuklidische Bewegung in den Nullpunkt überführen kann.

4. Es sei nun k ein nichteuklidischer *Kegelschnitt*, der φ nicht berührt. Wenn A nicht Brennpunkt von k ist, so ist nach dem obigen die Fußpunktkurve von A in bezug auf k eine rationale Kurve 4. Ordnung mit Doppelpunkten in A und den Berührungspunkten R und S der Tangenten von A an φ[1].

---

[1] Vgl. *F. Hohenberg*, Zirkulare Kurven in der nichteuklidischen Geometrie. Monatsh. f. Math. u. Phys., B. 45 (1937), p. 133ff.

Wählt man A speziell in einem *Brennpunkt* F von k, so ist nach Satz 1 die Fußpunktkurve k_1 von A in bezug auf k ein *Kegelschnitt*. Der Brennpunkt F ist der Schnittpunkt von zwei gemeinsamen Tangenten von k und φ, und k_1 geht durch die Berührungspunkte R und S dieser Tangenten mit φ. Der Schnittpunkt der beiden anderen gemeinsamen Tangenten von k und φ sei der Brennpunkt F_1, ihre Berührungspunkte mit φ seien R_1 und S_1. Der Fußpunktkegelschnitt k_1 muß auch durch R_1 und S_1 gehen, da die zu k in bezug auf φ polare Kurve k' durch diese Punkte geht, und da R_1 und S_1 bei der projektiven Inversion fest bleiben. Wie in der euklidischen Ebene muß ferner k_1 durch diejenigen Scheitelpunkte von k gehen, die auf der Brennpunktsachse FF_1 liegen, und k in diesen Punkten berühren.

Betrachten wir nun die Fußpunktkurve des Brennpunktes F_1 in bezug auf k, so ergibt sich, daß auch dieser Kegelschnitt durch R, S, R_1 und S_1 gehen, sowie k in den auf der Achse FF_1 liegenden Scheitelpunkten berühren muß, also mit dem Kegelschnitt k_1 identisch ist. Wir erhalten also:

Satz 2. *Die auf derselben Achse liegenden Brennpunkte F und F_1 eines nichteuklidischen Kegelschnittes k haben dieselbe Fußpunktkurve in bezug auf k, nämlich einen Kegelschnitt k_1, der k in den auf der Brennpunktsachse liegenden Scheitelpunkten berührt und durch die Berührungspunkte der Tangenten von F und F_1 an den absoluten Kegelschnitt geht.*

5. Es sei im *euklidischen Raum* eine Fläche K, ein Punkt A und eine Kugel C mit dem Mittelpunkt A gegeben. Falls K keine abwickelbare Fläche ist, hat A eine *Fußpunktfläche* K_1 in bezug auf K, nämlich den Ort der Fußpunkte der Lote von A auf die Tangentialebenen an K. Genau wie in der Ebene sieht man, daß K_1 die inverse Fläche der zu K in bezug auf die Kugel C polaren Fläche ist. Ist K eine Fläche 2. Ordnung, so ist K_1 im allgemeinen eine Zyklide.

Ist K eine abwickelbare Fläche, also die Tangentenfläche einer Raumkurve k, so reduziert sich die Fußpunktfläche von A auf eine *Fußpunktkurve* k_1. Diese Kurve ist invers zu der in bezug auf C polaren Kurve k' der abwickelbaren Fläche. Ist k eine *kubische Kurve* allgemeiner Lage, so ist auch k' eine kubische Kurve und k_1 daher eine Kurve 6. Ordnung mit dreifachem Punkt in A und mit 6 Punkten auf dem Kugelkreis[2]. Ist k speziell eine *kubische Parabel*, so enthält k' den Punkt A, und k_1 ist eine Raumkurve 5. Ordnung mit dreifachem Punkt in A und 4 Punkten auf dem Kugelkreis[2].

Die Fußpunktkurve des Punktes A in bezug auf die Kurve k selbst ist der geometrische Ort der Projektionen von A auf die Tangenten von k. Eine Tangente von k und die entsprechende Tangente der polaren Kurve k' sind zueinander polar in bezug auf die Kugel C, und die Normale von A auf die eine Tangente schneidet daher auch die andere unter einem rechten Winkel. Hieraus folgt, daß die Fußpunktkurven von A in bezug auf k und k' inverse Kurven sind.

6. Die obigen allgemeinen Resultate können wie in der Ebene auf den *nichteuklidischen Raum* übertragen werden, wobei die betrachtete Inversion an der Kugel C nur durch eine projektive Inversion mit dem Zentrum A in bezug auf die absolute Fläche 2. Ordnung Φ zu ersetzen ist. Satz 1 kann auf den Raum übertragen werden, wo er für die Fußpunktkurven und -flächen gilt. Die obigen speziellen Sätze über die kubischen Raumkurven gelten ebenfalls im nichteuklidischen Raum, wenn man den Kugelkreis durch den Kegelschnitt ersetzt, in dem die absolute Fläche Φ von der ihr umschriebenen Kegelfläche mit dem Scheitel A berührt wird.

---

[2] Vgl. *Müller* u. *Graf*, Über besondere rationale Raumkurven fünfter Ordnung, Monatsh., B. 45, p. 21; und Über besondere rationale Raumkurven sechster Ordnung, ebenda, p. 338.

Stützbare Bereiche, trigonometrische Polynome und Defizite höherer Ordnung.

Von
Rudolf Inzinger, Wien.

(Eingelangt am 2. Juni 1949.)

1. Stützbare Bereiche.

Den folgenden Betrachtungen wird die Menge $\mathfrak{M}$ der *stützbaren Bereiche* einer Eebene Π zugrunde gelegt. Unter einem stützbaren Bereich $\mathfrak{H}$ wird nach *H. Geppert* ein solcher nicht notwendig konvexer Bereiche verstanden, der als Differenzbereich zweier konvexer Bereiche darstellbar und somit lediglich durch die Existenz einer Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ gekennzeichnet ist, die als periodisch mit der Periode 2π, sowie als stetig und mindestens abschnittsweise stetig differenzierbar vorausgesetzt wird[1]. Es bedeutet dann $\mathfrak{H}$ den vorzeichenbegabten Abstand eines Tangentialspeeres des orientiert gedachten Bereichsrandes vom Koordinatenursprung 0 und φ den modulo 2π bestimmten Winkel desselben gegen eine feste Nullrichtung. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\varphi)$ ist sodann die Gleichung des als Speermannigfaltigkeit aufgefaßten Bereichsrandes in den polaren Speerkoordinaten $\mathfrak{H}$, φ[2].

Die Einbettung der Menge der konvexen Bereiche in die Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche, erweist sich insofern als zweckmäßig, als in $\mathfrak{M}$ die *Addition* und die *Subtraktion* zueinander inverse und unbeschränkt ausführbare Bereichsverknüpfungen sind, denen die gleichen Verknüpfungen ihrer Stützgeradenfunktionen entsprechen. Wird der Ursprung 0 des Koordinatensystems als *Nullbereich* $\mathfrak{O}$ eingeführt, dann kann die *Multiplikation* $c \,.\, \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \,.\, c$ eines Bereiches $\mathfrak{H}$ mit einer reellen Zahl c als eine c-fache Streckung des Bereiches $\mathfrak{H}$ von 0 aus erklärt werden. In der Menge $\mathfrak{M}$ können dann nicht bloß positive,

[1] *H. Geppert*, Über den Brunn-Minkowskischen Satz, Math. Zeitschr. 42 (1937), p. 238—254.

[2] Wir verwenden im folgenden zur Bezeichnung der stützbaren Bereiche und ihrer Stützgeradenfunktionen die gleichen großen Frakturbuchstaben.

sondern beliebige Linearkombinationen stützbarer Bereiche betrachtet werden. *Die Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche erweist sich demnach als ein linearer Vektorraum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen.*

Es ist wohlbekannt, daß sich alle Sätze aus der Theorie der konvexen Bereiche, welche lediglich die Existenz einer Stützgeradenfunktion voraussetzen, sinngemäß und ihrem Wesen erst voll gerecht werdend auch für alle stützbaren Bereiche der Menge $\mathfrak{M}$ aussprechen lassen. Demgemäß wird daher der Umfang L und der Flächeninhalt F eines stützbaren Bereiches durch die aus der Theorie der konvexen Bereiche wohlbekannten Formeln

$$L = \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}(\varphi)\, d\varphi$$

$$F = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{[\mathfrak{H}(\varphi)]^2 - [\dot{\mathfrak{H}}(\varphi)]^2\}\, d\varphi \tag{1}$$

definiert. Während jedoch ein konvexer Bereich stets einen nicht negativen Flächeninhalt und bei entsprechender Orientierung auch einen ebensolchen Umfang besitzt, kann der Flächeninhalt und der Umfang eines stützbaren Bereiches sowohl positiv, als auch negativ sein. Jede der beiden Größen kann überdies auch Null sein, ohne daß deshalb der Bereich entartet.

2. Problemstellung.

Durch

$$\Delta(\mathfrak{H}) = L^2 - 4\pi F \geqq 0 \tag{2}$$

wird jedem stützbaren Bereich $\mathfrak{H}$ eine nicht negative reelle Zahl $\Delta(\mathfrak{H})$ zugeordnet, die als ein *Defizit* des Bereiches $\mathfrak{H}$ bezeichnet wird. Für einen konvexen Bereich $\mathfrak{H}$ stimmt $\Delta(\mathfrak{H})$ mit dem isoperimetrischen Defizit von $\mathfrak{H}$ überein. Sein Verschwinden kennzeichnet bekanntlich die Kreisbereiche in der Menge der konvexen Bereiche als die Lösungen der sogenannten isoperimetrischen Aufgabe. Darüber hinaus erweist sich jedoch die Bedingung $\Delta(\mathfrak{H}) = 0$ auch als notwendig und hinreichend um die Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ als ein trigonometrisches Polynom erster Ordnung

$$\mathfrak{H}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi \tag{3}$$

und damit den Bereich $\mathfrak{H}$ auch in $\mathfrak{M}$ als Kreisbereich zu kennzeichnen.

In dieser Formulierung erweist sich der Defizitbegriff auch für beliebige stützbare Bereiche als sinnvoll. Es wird damit zugleich ein Weg für die folgende Verallgemeinerung dieses Begriffes gewiesen.

Ist $\mathfrak{L}$ eine Klasse stützbarer Bereiche und $\mathfrak{H}$ ein beliebiger stützbarer Bereich, dann soll eine dem Bereich $\mathfrak{H}$ zugeordnete reelle Zahl $\Delta(\mathfrak{H})$ als ein Defizit von $\mathfrak{H}$ hinsichtlich der Klasse $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden, wenn $\Delta(\mathfrak{H}) = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zugehörigkeit des Bereiches $\mathfrak{H}$ zur Klasse $\mathfrak{L}$ ist. In diesem Sinne ist sodann (2) ein Defizit von $\mathfrak{H}$ hinsichtlich der Klasse (3) der Kreise der Ebene *II*.

Wir betrachten im folgenden die *Klassenfolge $\mathfrak{L}_n$ der Polynombereiche* $\mathfrak{P}_n$. Jede der Klassen $\mathfrak{L}_n$ besteht aus den stützbaren Bereichen $\mathfrak{P}_n$ deren Stützgeradenfunktionen $\mathfrak{P}_n(\varphi)$ die trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung

$$\mathfrak{P}_n(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

sind. Die Klasse $\mathfrak{L}_1$ besteht sodann aus den Kreisen $\mathfrak{P}_1$ der Ebene *II*, während die Klasse $\mathfrak{L}_0$ lediglich die Kreise $\mathfrak{P}_0$ mit 0 als Mitte umfaßt. Die Defizite $\Delta_{n+1}(\mathfrak{H})$ eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ hinsichtlich der Klassen $\mathfrak{L}_n$ der Polynombereiche bezeichnen wir sodann als *Defizite höherer Ordnung von* $\mathfrak{H}$; sie bilden Folgen reeller Zahlen $\Delta_{n+1}(\mathfrak{H})$, aus deren Verhalten auf die Zugehörigkeit des Bereiches $\mathfrak{H}$ zu einer der Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ geschlossen werden kann. Aus dem Verschwinden eines Defizites einer Folge $\Delta_{n+1}(\mathfrak{H})$ folgt offensichtlich das Verschwinden aller Defizite von höherer Ordnung, so daß der Index des letzten nicht verschwindenden Defizites die engste Polynombereichsklasse kennzeichnet, der der Bereich $\mathfrak{H}$ angehört.

Unter den Möglichkeiten, die sich für die Bestimmung einer *Defizitfolge* eines stützbaren Bereiches hinsichtlich der Klassenfolge $\mathfrak{L}_n$ ergeben, werden im folgenden jene ausgewählt, die neben einer einfachen analytischen Bestimmung der Klassen $\mathfrak{L}_n$ auch eine einfache geometrische Kennzeichnung derselben ermöglichen.

3. Komponenten stützbarer Bereiche.

Von besonderem Interesse sind im folgenden die *Hypozykloidenbereiche* $\mathfrak{H}_\nu$ der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ mit den Stützgeradenfunktionen

$$\mathfrak{H}_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}, \; \mathfrak{H}_\nu(\varphi) = a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi, \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die sich für $\nu = 0$ als Kreise um 0 und für $\nu = 1$ als Punkte der Ebene Π erweisen. Für $\nu > 1$ ergeben sich stützbare, jedoch nicht konvexe Bereiche, die von gemeinen Hypozykloiden begrenzt werden. Jede der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ stellt für $\nu > 0$ eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit stützbarer Bereiche dar, die aus jedem derselben durch die zweiparametrige Gruppe der Drehstreckungen mit 0 als Zentrum erzeugt wird.

Die Polynombereiche $\mathfrak{P}_n$ einer Klasse $\mathfrak{L}_n$ erweisen sich sodann als die Summenbereiche

$$\mathfrak{P}_n = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{H}_\nu$$

je eines Hypozykloidenbereiches $\mathfrak{H}_\nu$ der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ ($\nu \leqq n$). Für $n = 0$ stimmt $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{L}_0$ überein, während jeder Kreisbereich $\mathfrak{P}_1$ aus $\mathfrak{L}_1$ die Summe aus seinem Mittelpunkt $\mathfrak{H}_1$ und dem zu $\mathfrak{P}_1$ umfanggleichen Kreis $\mathfrak{H}_0$ um 0 ist.

Durch

$$|\mathfrak{H}, \mathfrak{G}|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\mathfrak{H}(\varphi) - \mathfrak{G}(\varphi)]^2 \, d\varphi$$

erklären wir in der üblichen Weise den *Abstand* $|\mathfrak{H}, \mathfrak{G}|$ zweier stützbarer Bereiche $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$. Der Abstand $|\mathfrak{H}, \mathfrak{D}|$ des Bereiches $\mathfrak{H}$ vom Nullbereich $\mathfrak{D}$, bestimmt durch

$$|\mathfrak{H}, \mathfrak{D}|^2 = |\mathfrak{H}|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\mathfrak{H}(\varphi)]^2 \, d\varphi, \tag{4}$$

wird sodann auch als der *absolute Betrag* $|\mathfrak{H}|$ *des Bereiches* $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Sind $\mathfrak{H}(\varphi)$ und $\mathfrak{G}(\varphi)$ zwei stützbare Bereiche, dann wird durch

$$|\mathfrak{H}| \cdot |\mathfrak{G}| \cdot \cos\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}(\varphi)\, \mathfrak{G}(\varphi) \, d\varphi$$

ihr *inneres Produkt* und im Verein mit $|\mathfrak{H}|$ und $|\mathfrak{G}|$ ihr *Winkel* ω erklärt.

Es liegt in der Natur der Sache, daß wir im folgenden von der Möglichkeit der Entwicklung der Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ eines Bereiches $\mathfrak{H}$ in ihre Fourier-Reihe

$$\mathfrak{H}(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{H}_\nu(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi] \tag{5}$$

Gebrauch machen. Wegen der Stetigkeit und der abschnittsweisen

stetigen Differenzierbarkeit von $\mathfrak{H}(\varphi)$ konvergiert diese Reihe im ganzen Intervall $[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig.

Die einzelnen Glieder der Reihe (5) können wir nun als die Stützgeradenfunktionen von Hypozykloidenbereichen $\mathfrak{H}_\nu(\varphi)$ der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ ansehen und demgemäß den Bereich $\mathfrak{H}$ als die *Summe seiner hypozykloidischen Komponenten* $\mathfrak{H}_\nu$ betrachten[3]. Wir bezeichnen sodann die Koeffizienten a_ν, b_ν der Reihe (5), bzw. deren komplexe Verbindungen $z_\nu = a_\nu + b_\nu i$ als die Koordinaten des Bereiches $\mathfrak{H}$. Für den absoluten Betrag von $\mathfrak{H}$ gilt dann

$$|\mathfrak{H}|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathfrak{H}_\nu|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2), \tag{6}$$

während das innere Produkt zweier Bereiche $\mathfrak{H}(a_\nu, b_\nu)$ und $\mathfrak{G}(c_\nu, d_\nu)$ und damit auch ihr Winkel ω durch

$$|\mathfrak{H}| \,.\, |\mathfrak{G}| \,.\, \cos\omega = \frac{a_0\, c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu\, c_\nu + b_\nu\, d_\nu)$$

bestimmt ist.

Die n-te Partialsumme der Komponentenzerlegung (5) eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß sie in der Klasse $\mathfrak{L}_n$ den Bereich $\mathfrak{H}$ im Sinne unserer Abstandsmessung am besten approximiert. Der Abstand des Bereiches $\mathfrak{H}$ von einem Polynombereich $\mathfrak{P}_n$ aus $\mathfrak{L}_n$ nimmt somit für den Bereich $\mathfrak{P}_n = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{H}_\nu$ sein Minimum an, das durch

$$|\mathfrak{H}, \mathfrak{P}_n|^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\mathfrak{H}_\nu|^2 = \Delta_{n+1}(\mathfrak{H}) \tag{7}$$

bestimmt ist.

Die Folge (7) *ist offensichtlich das einfachste Beispiel einer Defizitfolge eines stützbaren Bereiches* $\mathfrak{H}$ *hinsichtlich der Klassenfolge* $\mathfrak{L}_n$, da $\Delta_{n+1}(\mathfrak{H})$ nur als Folge von $|\mathfrak{H}_\nu| = 0$ für $\nu > n$ verschwindet. Die Bestimmung der Defizitfolge (7) setzt jedoch die Kenntnis der Komponentenzerlegung (5) des Bereiches $\mathfrak{H}$ voraus, die zwar analytisch, nicht jedoch auch geometrisch definiert ist. Für eine geometrische Kennzeichnung der Bereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ kommen daher im folgenden nur solche Defizitfolgen eines stützbaren Bereiches in Frage, deren Bestimmung ohne (explizite) Kenntnis der Komponentenzerlegung (5) von $\mathfrak{H}$ möglich ist.

[3] Der Gedanke, einen stützbaren Bereich als Summe seiner hypozykloidischen Komponenten zu betrachten, stammt von *H. Görtler*, Erzeugung stützbarer Bereiche I und II, Deutsche Math. 2 (1937) und 3 (1938).

4. Faltung stützbarer Bereiche.

Durch

$$\mathfrak{H}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}^{(0)}(\varphi - \lambda)\, \mathfrak{T}(\lambda)\, d\lambda, \quad \mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}^{(0)}\, \mathfrak{T} \tag{8}$$

wird jedem Bereichspaar $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{M}$ ein stützbarer Bereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ zugeordnet, der als das *Faltungsprodukt* von $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird[4]. Man bestätigt unmittelbar, daß für diese Verknüpfung der stützbaren Bereiche das *kommutative* und das *assoziative Gesetz*, sowie hinsichtlich der Bereichsaddition auch das *distributive Gesetz* gilt. Durch die Einführung dieser multiplikativen Verknüpfung der stützbaren Bereiche wird somit die Menge $\mathfrak{M}$ zum *Stützbereichring*[5].

Der Faltungsbereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ erweist sich nach (8) als die *kontinuierliche Linearkombination* aus den Drehungslagen $\mathfrak{H}^{(0)}(\varphi - \lambda)$ von $\mathfrak{H}^{(0)}(\varphi)$ mit $\mathfrak{T}(\lambda)$ als Belegungsfunktion; er bestimmt für jeden Wert von φ das *innere Produkt* jenes Bereiches $\mathfrak{H}^{(0)}(\varphi - \lambda)$ mit $\mathfrak{T}(\lambda)$, der aus $\mathfrak{H}^{(0)}(\lambda)$ durch die Spiegelung an der x-Achse, durch Umkehr der Orientierung und durch eine Drehung um 0 durch den Winkel φ hervorgeht.

Wegen der Orthogonalität der Winkelfunktionen ergibt sich $\mathfrak{H}^{(1)}(\varphi)$ gliedweise durch die Faltung gleichnamiger Komponenten von $\mathfrak{H}^{(0)}$ (a_ν, b_ν) und $\mathfrak{T}$ (c_ν, d_ν). Für die Koordinaten dieser Bereiche gilt dann $z_\nu(\mathfrak{H}^{(1)}) = z_\nu(\mathfrak{H}^{(0)}) \,.\, z_\nu(\mathfrak{T})$, bzw.

$$a_0^{(1)} = a_0^{(0)} c_0,\ a_\nu^{(1)} = a_\nu^{(0)} c_\nu - b_\nu^{(0)} d_\nu,\ b_\nu^{(1)} = a_\nu^{(0)} d_\nu + b_\nu^{(0)} c_\nu, \tag{9}$$

woraus $|\mathfrak{H}_0^{(1)}|^2 = 2\,|\mathfrak{H}_0^{(0)}|^2\,|\mathfrak{T}_0|^2$, $|\mathfrak{H}_\nu^{(1)}|^2 = |\mathfrak{H}_\nu^{(0)}|^2\,|\mathfrak{T}_\nu|^2$ und somit für den Absolutbetrag von $\mathfrak{H}^{(1)}$

$$|\mathfrak{H}^{(1)}|^2 = 2\,|\mathfrak{H}_0^{(0)}|^2\,|\mathfrak{T}_0|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathfrak{H}_\nu^{(0)}|^2\,|\mathfrak{T}_\nu|^2 \tag{10}$$

folgt.

Man entnimmt aus (10), daß der Faltungsbereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ dann und nur dann mit dem Nullbereich $\mathfrak{O}$ übereinstimmt, wenn entweder einer der beiden Faktoren selbst mit $\mathfrak{O}$ übereinstimmt oder aber die beiden Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{T}$ zueinander *klassenfremd* sind. An der Komponentenzerlegung von $\mathfrak{H}^{(0)}$ sind sodann nur jene Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ beteiligt, die nicht

---

[4] Die Faltung zweier stützbarer Bereiche drücken wir im folgenden durch die Nebeneinandersetzung der Bereichssymbole aus. Wo eine Verwechslung mit dem gewöhnlichen Produkt der Stützgeradenfunktionen zu befürchten ist, werden zur Unterscheidung Klammern gesetzt.

[5] Vgl. *H. Görtler*, a. a. O., II., p. 192.

in der Komponentenzerlegung von $\mathfrak{T}$ auftreten und umgekehrt. Die Klassenfremdheit zweier Bereiche ist somit ein *Sonderfall der Orthogonalität.* Jeder Bereich der zu einer der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ fremd ist, ist somit ein *Nullteiler des Stützbereichsringes* $\mathfrak{M}$. Wir bezeichnen einen solchen Bereich auch als *unvollständig* und verstehen demgemäß unter einem *vollständigen Bereich* einen solchen der nicht verschwindende Komponenten aus allen Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ enthält.

Durch

$$\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^2 = \mathfrak{T}\,\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^n = \mathfrak{T}^{n-1}\,\mathfrak{T}$$

können zunächst für jede natürliche Zahl n als Exponenten die *Faltungspotenzen eines stützbaren Bereiches* $\mathfrak{T}$ erklärt und daraus durch Linearkombination *Bereichspolynome*

$$\Phi(\mathfrak{T}(\varphi)) = \sum_{i=1}^{n} A_i\,\mathfrak{T}^i(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\mathfrak{T}_\nu(\varphi)) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Phi(z_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\Re(\Phi(z_\nu))\cos\nu\varphi + \Im(\Phi(z_\nu))\sin\nu\varphi]$$

gebildet werden. Für ihre Absolutbeträge gilt dann

$$|\Phi(\mathfrak{T}(\varphi))|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Phi(\mathfrak{T}_\nu(\varphi))|^2 = \tfrac{1}{2}|\Phi(z_0)|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\Phi(z_\nu)|^2$$

5. Selbstadjungierte Bereiche.

Jeder stützbare Bereich $\mathfrak{T}(c_\nu, d_\nu)$ ist die Summe

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}''$$

aus seinem *geraden Bestandteil* $\mathfrak{T}'(c_\nu, 0)$ und seinem *ungeraden Bestandteil* $\mathfrak{T}''(0, d_\nu)$, die durch die Stützgeradenfunktionen

$$\mathfrak{T}'(\varphi) = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{T}(\varphi) + \mathfrak{T}(-\varphi)],\ \mathfrak{T}''(\varphi) = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{T}(\varphi) - \mathfrak{T}(-\varphi)]$$

definiert sind. Es ist dann $\mathfrak{T}'$ zur x-Achse und $\mathfrak{T}''$ zur y-Achse des Koordinatensystems mit Umkehrung der Orientierung symmetrisch. Die Fourier-Reihen ihrer Stützgeradenfunktionen sind somit reine cos-, bzw. sin-Reihen. Der Bereich $\overline{\mathfrak{T}}(c_\nu, d_\nu)$

$$\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}' - \mathfrak{T}''$$

wird sodann als zu $\mathfrak{T}(c_\nu, d_\nu)$ *adjugiert* bezeichnet. Demgemäß ist ein zur x-Achse mit Umkehrung der Orientierung symmetrischer Bereich *selbstadjungiert.*

Die Menge $\mathfrak{M}'$ der selbstadjungierten stützbaren Bereiche stellt einen Unterring des Stützbereichsringes $\mathfrak{M}$ dar. Insbesondere sind die Faltungspotenzen eines selbstadjungierten Bereiches $\mathfrak{T}(c_\nu, 0)$ und die daraus gebildeten Bereichspolynome

$$\Phi(\mathfrak{T}(\varphi)) = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathfrak{T}^i(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\mathfrak{T}_\nu(\varphi)) = \tfrac{1}{2}\Phi(c_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi(c_\nu)\cos\nu\varphi$$

wieder selbstadjungierte Bereiche.

Das Faltungsprodukt eines Bereiches $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}''$ mit seinem adjungierten $\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}' - \mathfrak{T}''$

$$\mathfrak{T}(\varphi)\,\overline{\mathfrak{T}}(\varphi) = \mathfrak{T}'^2(\varphi) - \mathfrak{T}''^2(\varphi) = \frac{{c_0}^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} ({c_\nu}^2 + {d_\nu}^2)\cos\nu\varphi \qquad (11)$$

ist selbstadjungiert und wird als der *Normbereich* von $\mathfrak{T}$, bzw. $\overline{\mathfrak{T}}$ bezeichnet. *Der Normbereich $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ bestimmt für jeden Wert von φ das innere Produkt des Bereiches $\mathfrak{T}(\lambda)$ mit seiner um den Ursprung 0 durch den Winkel φ gedrehten Lage $\mathfrak{T}(\lambda+\varphi)$. Für $\varphi = 0$ bestimmt daher der Normbereich $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ das Quadrat des absoluten Betrages von $\mathfrak{T}$.* Für die n-te Faltungspotenz des Normbereiches $\mathfrak{T}(\varphi)\,\overline{\mathfrak{T}}(\varphi)$ von $\mathfrak{T}(\varphi)$ folgt aus (11)

$$(\mathfrak{T}(\varphi)\,\overline{\mathfrak{T}}(\varphi))^n = \frac{{c_0}^{2\,n}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} ({c_\nu}^2 + {d_\nu}^2)^n \cos\nu\varphi$$

6. Polynombereichsfolgen.

Aus (9) entnimmt man, daß jede der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ einen Unterring des Stützbereichringes $\mathfrak{M}$ darstellt, der für $\nu > 0$ zum *Körper der komplexen* und für $\nu = 0$ zum *Körper der reellen Zahlen isomorph* ist. In den Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ stellen somit die Bereiche

$$\mathfrak{E}_0(\varphi) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{E}_\nu(\varphi) = \cos\nu\varphi$$

die *Einheitselemente* dar. *Die Faltung ist daher in jeder der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ eindeutig umkehrbar, sofern die Division durch den Nullbereich $\mathfrak{O}$ ausgeschlossen wird.*

Jede der Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ stellt gleichfalls einen Unterring des Stützbereichringes $\mathfrak{M}$ mit dem Einheitselement

$$\sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{E}_\nu(\varphi)$$

dar. *Die Faltung ist daher auch in jeder der Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ eindeutig umkehrbar, sofern als Divisoren nur vollständige Bereiche dieser Klassen zugelassen werden.*

Der Stützbereichring $\mathfrak{M}$ selbst besitzt jedoch *kein Einheitselement*, da die Folge der Partialsummen von

$$\mathfrak{E}(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{E}_\nu(\varphi) \tag{12}$$

nicht konvergiert und $\mathfrak{E}$ demnach keinen stützbaren Bereich darstellt. Diesem Mangel kann jedoch dadurch abgeholfen werden, daß man den Stützbereichring $\mathfrak{M}$ in die Menge $\mathfrak{N}$ der Polynombereichsfolgen einbettet. Unter einer Polynombereichsfolge $\mathfrak{H}$ wird dabei die durch ihre Komponentendarstellung $\mathfrak{H} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{H}_\nu$ definierte Folge $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{H}_\nu$ von Polynombereichen der Klassen $\mathfrak{L}_n$ verstanden, von der jedoch keinerlei Konvergenzeigenschaften gefordert werden. Als Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ von $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir sodann die Folge der Partialsummen $\sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{H}_\nu(\varphi)$ jener trigonometrischen Reihe, die formal der Komponentendarstellung von $\mathfrak{H}$ entspricht. Sämtliche Aussagen über die Verknüpfungen der stützbaren Bereiche lassen sich sodann sinngemäß auch für Polynombereichsfolgen aussprechen. Es ist dies lediglich eine geometrische Formulierung des formalen Rechnens mit, gegebenenfalls auch divergenten trigonometrischen Reihen, das in der Analysis seit langem angewendet wird.

Die Menge $\mathfrak{N}$ der Polynombereichsfolgen stellt nunmehr einen *Oberring* zum Stützbereichring $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{E}$ (12) als Einheitselement dar. *Die Faltung ist daher in $\mathfrak{N}$ eindeutig umkehrbar, sofern als Divisoren nur vollständige Polynombereichsfolgen zugelassen werden.*

Der Stützbereichring $\mathfrak{M}$ ist jener Unterring von $\mathfrak{N}$, dessen Polynombereichsfolgen konvergent sind und im Intervall $[0, 2\pi]$ stetige und abschnittsweise stetig differenzierbare Funktionen darstellen. Im folgenden Abschnitt wird von diesen speziellen, den Stützbereichring $\mathfrak{M}$ kennzeichnenden Eigenschaften kein Gebrauch gemacht, so daß den Betrachtungen der Ring $\mathfrak{N}$ oder irgend ein Unterring von $\mathfrak{N}$ der alle Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ umfaßt, zugrunde gelegt werden kann. Gelegentlich der Aufstellung von Defizitfolgen in 8 setzen wir jedoch voraus, daß die auftretenden Polynombereichsfolgen absolute Beträge besitzen, die durch (4) definiert sind. Von dieser Stelle an ergibt sich sodann eine Einschränkung des Gültigkeitsbereiches unserer Betrachtungen auf den *Ring $\mathfrak{L}$ jener Polynombereichsfolgen, die sich als die Fourier-Reihen der im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbaren Funktionen* erweisen.

Den nunmehr folgenden Betrachtungen kann sodann der Ring $\mathfrak{L}$ oder irgend ein Unterring von $\mathfrak{L}$, der sämtliche Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ umfaßt, zugrunde gelegt werden. Im Hinblick auf den geometrischen Ausgangspunkt unserer Fragestellung stellen wir auch weiterhin den Stützbereichring $\mathfrak{M}$ als Unterring von $\mathfrak{L}$ in den Mittelpunkt unseres Interesses, ohne damit eine Beschränkung der Allgemeinheit zu beabsichtigen.

7. Lineare Transformationen.

Jede vollständige Polynombereichsfolge $\mathfrak{T}(\varphi)$ definiert in der Menge $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}^{(0)}\mathfrak{T}$ (8) eine *eindeutige und eindeutig umkehrbare lineare Transformation $\mathfrak{T}$ der Polynombereichsfolgen*. Die Eindeutigkeit der Transformation $\mathfrak{T}$ ist trivial, ihre eindeutige Umkehrbarkeit folgt aus der Vollständigkeit von $\mathfrak{T}$. Die Transformation $\mathfrak{T}$ ist allein dadurch bestimmt, daß sie der Einheitsfolge $\mathfrak{E}$ die Polynombereichsfolge $\mathfrak{T}$ zuordnet.

Zunächst ist es vollkommen belanglos, ob die Folgen $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ stützbare Bereiche darstellen oder nicht. Insbesondere gibt es in $\mathfrak{N}$ lineare Transformationen vom Faltungstypus (8), die die Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche invariant lassen und solche, die bloß eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$ abbilden. In der Summationstheorie der divergenten trigonometrischen Reihen gelangen dagegen vor allem solche lineare Transformationen vom Faltungstypus (8) zur Anwendung, die eine $\mathfrak{M}$ umfassende Teilmenge von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{M}$ abbilden.

Die Transformation $\mathfrak{T}(c_\nu, d_\nu)$ läßt jede der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ und damit auch jede der Klassen $\mathfrak{L}_n$ invariant. Sie induziert in $\mathfrak{K}_0$ eine Streckung und in jeder der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu > 0)$ eine Drehstreckung der Bereiche für die sich die charakteristischen Polynome

$$\chi_0(\lambda) = \lambda - c_0, \quad \chi_\nu(\lambda) = \lambda^2 - 2c_\nu\lambda + (c_\nu^2 + d_\nu^2) \tag{13}$$

ergeben. Jede der Transformationen

$$\chi_0(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T} - c_0\mathfrak{E}, \quad \chi_\nu(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}^2 - 2c_\nu\mathfrak{T} + (c_\nu^2 + d_\nu^2)\mathfrak{E} \tag{14}$$

annulliert daher sämtliche Bereiche der entsprechenden Klasse $\mathfrak{K}_\nu$. Die Polynombereichsfolgen $\chi_\nu(\mathfrak{T})$ (14) sind daher zu den Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ fremd und somit Nullteiler von $\mathfrak{N}$. Um zu gewährleisten, daß sie *nur* zu den Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ fremd sind und daher Komponenten aus allen Klassen $\mathfrak{K}_\mu$ $(\mu \neq \nu)$ enthalten, muß im folgenden vorausgesetzt werden, daß die Koordinatenpaare (c_ν, d_ν) sämtlicher Komponenten von $\mathfrak{T}$ verschieden

sind. Dagegen verzichten wir in Hinkunft auf die eindeutige Umkehrbarkeit der Transformation $\mathfrak{T}$ und lassen demnach auch solche Polynombereichsfolgen $\mathfrak{T}$ zu, die lediglich zu einer einzigen Klasse $\mathfrak{K}_\nu$ fremd sind.

Aus (13) ergeben sich nun die charakteristischen Polynome

$$\Psi_n(\lambda) = \prod_{\nu=0}^{n} \chi_\nu(\lambda) = \sum_{m=0}^{2n+1} A_{n\,m}\,\lambda^m$$

von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{L}_n$. Für jede ganze Zahl $k \geqq 0$ annullieren daher die Transformationen

$$\Lambda_{n+1}^k(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}^k\,\Psi_n(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}^k \prod_{\nu=0}^{n} \chi_\nu(\mathfrak{T}) = \sum_{m=0}^{2n+1} A_{n\,m}\,\mathfrak{T}^{m+k} \tag{15}$$

jeden Bereich aus $\mathfrak{L}_n$. Die Polynombereichsfolgen $\Lambda_{n+1}^k(\mathfrak{T})$ (15) sind daher Nullteiler von $\mathfrak{R}$, die zu den Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu \leqq n)$ fremd sind, aber Komponenten aus allen Klassen $\mathfrak{K}_\mu$ $(\mu > n)$ enthalten. Sie ergeben sich offensichtlich aus $2 \cdot n + 2$ aufeinanderfolgenden Faltungspotenzen von $\mathfrak{T}$ durch Elimination der Komponenten aus den Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu \leqq n)$. Wir bezeichnen nun für ein festes k und $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Transformationen $\Lambda_{n+1}^k(\mathfrak{T})$ (15) als eine *Folge von annullierenden Transformationen für die Klassenfolge* $\mathfrak{L}_n$.

Für eine gerade Polynombereichsfolge $\mathfrak{T}$ $(d_\nu = 0)$ sind auch sämtliche annullierenden Transformationen $\Lambda_{n+1}^k(\mathfrak{T})$ (15) gerade. Ist jedoch $\mathfrak{T}$ ungerade $(c_\nu = 0)$, dann ist $\chi_0(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$ ungerade und $\chi_\nu(\mathfrak{T})$ für jedes $\nu > 0$ gerade. Die annullierenden Transformationen $\Lambda_{n+1}^k(\mathfrak{T})$ (15) sind daher gerade oder ungerade, je nachdem k ungerade oder gerade ist.

Ist $\mathfrak{T}$ eine gerade (selbstadjungierte) Polynombereichsfolge $(d_\nu = 0)$, dann erweisen sich für $\nu > 0$ die Polynome $\chi_\nu(\lambda)$ (13) als die Quadrate der Linearfaktoren

$$\bar{\chi}_0(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \lambda - c_0, \quad \bar{\chi}_\nu(\lambda) = \sqrt{\chi_\nu(\lambda)} = \lambda - c_\nu,$$

weshalb daher bereits die Transformationen

$$\bar{\chi}_\nu(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T} - c_\nu\,\mathfrak{E}$$

jeden Bereich aus $\mathfrak{K}_\nu$ annullieren. Ist

$$\Phi_n(\lambda) = \prod_{\nu=0}^{n} \bar{\chi}_\nu(\lambda) = \prod_{\nu=0}^{n} (\lambda - c_\nu) = \sum_{m=0}^{n+1} A'_{n\,m}\,\lambda^m, \tag{16}$$

dann stellt für jede ganze Zahl $k \geqq 0$ bereits

$$\Lambda'^k_{n+1}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}^k\,\Phi_n(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}^k \prod_{\nu=0}^{n} \bar{\chi}_\nu(\mathfrak{T}) = \sum_{m=0}^{n+1} A'_{n\,m}\,\mathfrak{T}^{m+k} \tag{17}$$

eine *Folge von selbstadjungierten annullierenden Transformationen der Klassenfolge* $\mathfrak{L}_n$ *dar.*

Für eine beliebige (nicht selbstadjungierte) Transformation $\mathfrak{T}$ ergibt sich aus (17), wenn darin $\mathfrak{T}$ durch die Normbereichsfolge $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{T}$ und demgemäß in (16) c_ν durch $c_\nu^2 + d_\nu^2$ ersetzt wird, die *Folge*

$$\Lambda'^{k}_{n+1}(\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}) = (\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}})^k \Phi_n(\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}) = \sum_{m=0}^{n+1} A'_{n\,m}(\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}})^{m+k} \tag{18}$$

der selbstadjungierten annullierenden Transformationen der Klassenfolge $\mathfrak{L}_n$ die im folgenden mehrfach angewendet wird.

Wird in (18) $\mathfrak{T}$ als ungerade vorausgesetzt, dann gilt $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}} = -\mathfrak{T}^2$, weshalb aus (15) und (18)

$$\Lambda^{2l+1}_{n+1}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}^{2l+1}\Psi_n(\mathfrak{T}) = (-1)^{n+l+1}(\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}})^l \Phi_n(\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}) = \\ = (-1)^{n+l+1}\Lambda'^{l}_{n+1}(\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}})$$

folgt.

8. Defizitfolgen.

Ist $\mathfrak{H}$ irgend eine Polynombereichsfolge und sind

$$\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{H},\ \mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{T},\ \mathfrak{H}^{(i)} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{T}^i \tag{19}$$

die Faltungsprodukte von $\mathfrak{H}$ mit den Faltungspotenzen von $\mathfrak{T}$, dann sind die Faltungsprodukte von $\mathfrak{H}$ mit den annullierenden Transformationen $\Lambda^k_{n+1}(\mathfrak{H})$ der Folge (15)

$$\mathfrak{D}^k_{n+1}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}\,\Lambda^k_{n+1}(\mathfrak{T}) = \sum_{m=0}^{2n+1} A_{n\,m}\,\mathfrak{H}^{(m+k)} \tag{20}$$

für jede Wahl von $\mathfrak{H}$ fremd zu den entsprechenden Klassen $\mathfrak{L}_n$, doch enthalten sie Komponenten aus allen Klassen $\mathfrak{R}_\nu$ $(\nu > n)$, sofern diese am Aufbau von $\mathfrak{H}$ beteiligt sind.

Stellen sämtliche der Polynombereichsfolgen (19) stützbare Bereiche dar, dann ist auch (20) für jedes k und n ein stützbarer Bereich, der dann und nur dann mit dem Nullbereich $\mathfrak{O}$ übereinstimmt, wenn $\mathfrak{H}$ keine Komponenten der Klassen $\mathfrak{R}_\nu$ $(\nu > n)$ enthält und demgemäß der Klasse $\mathfrak{L}_n$ angehört. Die Bereiche $\mathfrak{D}^k_{n+1}(\mathfrak{H})$ können daher sinngemäß als die zu der Folge (15) gehörigen *Defizitbereiche n-ter Ordnung von* $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden. Zu ihrer Bestimmung ist lediglich die Kenntnis der Komponentenzerlegung der Transformation $\mathfrak{T}$ sowie die Kenntnis der Folge (19) der transformierten Bereiche erforderlich.

Jedes Kriterium für die Übereinstimmung der Defizitbereiche $\mathfrak{D}^k_{n+1}(\mathfrak{H})$ mit dem Nullbereich $\mathfrak{O}$ entscheidet damit auch die Frage der Zugehörigkeit des Bereiches $\mathfrak{H}$ zu einer der Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$. *Die Folge*

$$\Delta^k_{n+1}(\mathfrak{H}) = |\,\mathfrak{D}^k_{n+1}(\mathfrak{H})\,|^2$$

der Quadrate der Absolutbeträge der Defizitbereiche (20) *stellt sodann für jedes k eine Defizitfolge des Bereiches* $\mathfrak{H}$ *dar.*

Für eine selbstadjungierte Transformation $\mathfrak{T}$ ergibt sich jedoch eine wesentliche Vereinfachung in der Bestimmung einer Defizitfolge $\Delta^k_{n+1}(\mathfrak{H})$ eines Bereiches $\mathfrak{H}$, wenn die Folge der annullierenden Transformationen $\Lambda'^k_{n+1}(\mathfrak{T})$ (18) verwendet wird und diese statt mit $\mathfrak{H}$ mit dem Normbereich $\mathfrak{H}\,\overline{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{H}$ gefaltet wird. Es ergeben sich dann die *selbstadjungierten Defizitbereiche n-ter Ordnung*

$$\mathfrak{D}'^k_{n+1}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}\,\overline{\mathfrak{H}}\,\Lambda'^k_{n+1}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{H}\,\overline{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{T}^k\Phi_n(\mathfrak{T}) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_n(c_\nu)\,c_\nu^k\,|\,\mathfrak{H}_\nu\,|^2\cos\nu\varphi$$

für deren Übereinstimmung mit dem Nullbereich $\mathfrak{O}$ das Verschwinden der Funktionswerte an der Stelle $\varphi = 0$

$$\Delta^k_{n+1}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{D}'^k_{n+1}(\mathfrak{H})_{\varphi=0} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_n(c_\nu)\,c_\nu^k\,|\,\mathfrak{H}_\nu\,|^2 \qquad (21)$$

zunächst eine bloß *notwendige Bedingung* darstellt. Die Bedingung ist jedoch dann auch *hinreichend*, wenn durch das Verhalten der Koeffizienten $\Phi_n(c_\nu)\,c_\nu^k$ der unendlichen Reihe (21) gewährleistet wird, daß $\Delta^k_{n+1}(\mathfrak{H})$ nur als Folge von $|\,\mathfrak{H}_\nu\,|^2 = 0$ für $\nu > n$ verschwindet. Aus der Ungleichheit der c_ν folgt, daß die Polynome $\Phi_n(c_\nu)$ für $\nu > n$ sicher nicht verschwinden, weshalb die Polynombereichsfolge $\mathfrak{T}$ lediglich der *Vorzeichenbedingung*

$$\operatorname{sign}\Phi_n(c_\nu)\,c_\nu^k = \operatorname{sign}\Phi_n(c_\mu)\,c_\mu^k, \quad \nu, \mu > n$$

genügen muß. Diese Vorzeichenbedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn die c_ν im Vorzeichen übereinstimmen und eine im engeren Sinne monotone Zahlenfolge bilden. Für $c_\nu > 0$ gilt sodann

$$c_{\nu+1} > c_\nu\colon \nu > n,\ \operatorname{sign}\Phi_n(c_\nu) = +1,\ \Phi_n(c_{\nu+1}) > \Phi_n(c_\nu); \qquad (22)$$

$$c_{\nu+1} < c_\nu\colon \nu > n,\ \operatorname{sign},\Phi_n(c_\nu) = (-1)^{n+1},\ |\Phi_n(c_{\nu+1})\,| > |\,\Phi_n(c_\nu)\,|. \qquad (23)$$

Unter den angegebenen Bedingungen stellt $\Delta^k_{n+1}(\mathfrak{H})$ (21) *für jedes k und* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *eine Defizitfolge des Bereiches* $\mathfrak{H}$ *dar. Die Defizite dieser Folge erweisen sich dabei als die inneren Produkte des Normbereiches* $\mathfrak{H}\,\overline{\mathfrak{H}}$ *von* $\mathfrak{H}$ *mit den annullierenden Transformationen* $\Lambda'^k_{n+1}(\mathfrak{T})$ (18).

Die Existenz der Defizitfolge $\Delta_{n+1}^{k}(\mathfrak{H})$ (21) eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ setzt voraus, daß die Transformation $\mathfrak{T}$ auf den Bereich $\mathfrak{H}$ beliebig oft anwendbar ist. Die Transformation $\mathfrak{T}$ ist auf alle stützbaren Bereiche beliebig oft anwendbar, wenn die Zahlenfolge c_ν beschränkt $|c_\nu| < M$ ist. Ist die Folge c_ν jedoch nicht beschränkt, dann ist die Konvergenz der unendlichen Reihen (21) von der Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe $|\mathfrak{H}|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathfrak{H}_\nu|^2$ (6) abhängig. Die Transformation ist sodann nur auf die Bereiche einer speziellen Klasse und gegebenenfalls auch auf diese bloß in einer endlich oftmaligen Wiederholung anwendbar. Im letzteren Falle bricht die Defizitfolge $\Delta_{n+1}^{k}(\mathfrak{H})$ (21) nach endlich vielen Gliedern ab. Soweit sie existiert, ist sie jedoch geeignet, die Zugehörigkeit eines Bereiches zu einer der Klassen $\mathfrak{L}_n$ zu entscheiden.

9. Defizitschema.

Wir machen im folgenden von der Defizitfolge $\Delta_{n+1}^{k}(\mathfrak{H})$ (21) in der Weise Gebrauch, daß wir anstelle der selbstadjungierten Transformation $\mathfrak{T}$ die Normbereichsfolge $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ einer beliebigen Transformation $\mathfrak{T}$ setzen. Die Folge c_ν besteht somit aus den Quadratsummen der Koordinatenpaare der Komponenten $\mathfrak{T}_\nu$ und $\mathfrak{T}$; wir setzen von ihr die Erfüllung der Vorzeichenbedingung voraus.

Ist die Transformation $\mathfrak{T}$ auf den Bereich $\mathfrak{H}$ beliebig oft anwendbar, dann ergibt sich für die Absolutbeträge der Bereiche $\mathfrak{H}^{(k)} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{T}^k$

$$\Delta_0^k(\mathfrak{H}) = |\mathfrak{H}^{(k)}|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^k |\mathfrak{H}_\nu|^2 < \infty.$$

Die Elimination von $|\mathfrak{H}_0|^2$ aus aufeinanderfolgenden Reihen ergibt sodann

$$\Delta_1{}^k(\mathfrak{H}) = \Delta_0^{k+1}(\mathfrak{H}) - c_0 \Delta_0^k(\mathfrak{H}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_0(c_\nu)\, c_\nu^k |\mathfrak{H}_\nu|^2 < \infty,$$

woraus durch die weitere Elimination von $|\mathfrak{H}_1|^2$

$$\Delta_2^k(\mathfrak{H}) = \Delta_1^{k+1}(\mathfrak{H}) - c_1 \Delta_1^k(\mathfrak{H}) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \Phi_1(c_\nu)\, c_\nu^k |\mathfrak{H}_\nu|^2 < \infty$$

folgt. Nach $n+1$ Schritten führt dieser Eliminationsprozeß zu

$$\Delta_{n+1}^k(\mathfrak{H}) = \Delta_n^{k+1}(\mathfrak{H}) - c_n \Delta_n^k(\mathfrak{H}) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_n(c_\nu)\, c_\nu^k |\mathfrak{H}_\nu|^2 < \infty \quad (24)$$

und man erkennt, daß sich daraus für jedes k eine Defizitfolge (21) für den Bereich $\mathfrak{H}$ ergibt.

Es erweist sich als zweckmäßig die Defizite $\Delta_{n+1}^{k}(\mathfrak{H})$ in dem folgenden *Defizitschema* anzuordnen:

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
$\mathfrak{H}^{(0)}$	Δ_0^0	Δ_1^0	Δ_2^0	Δ_3^0	Δ_4^0
$\mathfrak{H}^{(1)}$	Δ_0^1	Δ_1^1	Δ_2^1	Δ_3^1	
$\mathfrak{H}^{(2)}$	Δ_0^2	Δ_1^2	Δ_2^2		
$\mathfrak{H}^{(3)}$	Δ_0^3	Δ_1^3			
$\mathfrak{H}^{(4)}$	Δ_0^4				

und über jede Spalte die Koordinate c_ν der entsprechenden Komponente von $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ zu setzen. Nach (24) entsteht sodann das k-te Glied der $(n+1)$-ten Spalte Δ_{n+1}^{k}, indem man das c_n-fache des k-ten Gliedes der n-ten Spalte Δ_n^k von dem darunter stehenden $(k+1)$-ten Glied Δ_n^{k+1} dieser Spalte abzieht.

Jede Zeile des Defizitschemas stellt sodann eine Defizitfolge für jeden der Bereiche $\mathfrak{H}^{(k)}$ dar. Es erscheint jedoch zweckmäßig, dem Bereich $\mathfrak{H}^{(k)}$ die k-te Zeile des Schemas als spezielle Defizitfolge $\Delta_{n+1}^{k}(\mathfrak{H})$ zuzuordnen, da sodann sämtliche Zeilen in der gleichen Weise von den Komponenten der entsprechenden Bereiche abhängen.

Die Defizite $\Delta_{n+1}^{0}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ sind sodann die mit den Koeffizienten der Polynome $\Phi_n(\lambda)$ gebildeten Linearkombinationen

$$\Delta_{n+1}^{0}(\mathfrak{H}) = \sum_{m=0}^{n+1} A'_{n\,m}\,|\,\mathfrak{H}^{(m)}\,|^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_n(c_\nu)\,|\,\mathfrak{H}_\nu\,|^2$$

aus den Quadraten der absoluten Beträge der ersten $n+2$ Bereiche der Folge $\mathfrak{H}^{(k)}$. Sie ergeben sich aus der unendlichen Reihe $|\,\mathfrak{H}\,|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\,\mathfrak{H}_\nu\,|^2$ (6) durch Transformation mittels der Matrix $\Phi_n(c_\nu)$ deren Glieder für $\nu \leqq n$ verschwinden.

Die Koordinaten c_ν der Normbereichsfolge $\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ einer beliebigen Polynombereichsfolge $\mathfrak{T}$ sind nicht negativ. Für eine monoton wachsende Folge c_ν sind daher nach (22) alle Defizite des Schemas positiv, während wegen (23) für eine monoton abnehmende Folge c_ν die Spalten im Vorzeichen alternieren. Ist $c_0 = 0$, dann stimmt die erste Spalte des Schemas mit der um das nullte Glied verkürzten nullten Spalte desselben überein.

Für eine im engeren Sinne monoton abnehmende Folge $c_\nu > 0$ gestattet das Defizitschema die Bestimmung der Absolutbeträge der Komponenten des Bereiches $\mathfrak{H}$. Aus (24) folgt nämlich

$$\left| \frac{\Delta_{n+1}^k(\mathfrak{H})}{c_{n+1}^k} \right| = \left| \Phi_n(c_{n+1}) \left| \mathfrak{H}_{n+1} \right|^2 \right| + \left| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \Phi_n(c_\nu) \left(\frac{c_\nu}{c_{n+1}} \right)^k \left| \mathfrak{H}_\nu \right|^2 \right| < \infty.$$

Wird nun

$$0 \leqq \left| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \Phi_n(c_\nu) \left| \mathfrak{H}_\nu \right|^2 \right| = K < \infty$$

gesetzt, dann gilt wegen $c_{\nu+1} < c_\nu$

$$\left| \Phi_n(c_{n+1}) \left| \mathfrak{H}_{n+1} \right|^2 \right| \leqq \left| \frac{\Delta_{n+1}^k(\mathfrak{H})}{c_{n+1}^k} \right| \leqq \left| \Phi_n(c_{n+1}) \left| \mathfrak{H}_{n+1} \right|^2 \right| + \left(\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \right)^k K,$$

woraus sodann

$$\left| \mathfrak{H}_{n+1} \right|^2 = \frac{1}{\left| \Phi_n(c_{n+1}) \right|} \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\Delta_{n+1}^k(\mathfrak{H})}{c_{n+1}^k} \right| \tag{25}$$

folgt. Es ist somit der Absolutbetrag jeder Komponente $\mathfrak{H}_\nu$ von $\mathfrak{H}$ durch die entsprechende Spalte des Defizitschemas bestimmt. Die Gleichung (25) kann damit gleichzeitig auch als Aussage über die Größenordnung der Defizite des Schemas betrachtet werden.

10. Flächeninhalte und (isoperimetrische) Defizite.

Aus (1) folgt für den Flächeninhalt F eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu = \frac{\pi}{4} a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2) = -\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^2 - 1) \left| \mathfrak{H}_\nu \right|^2, \tag{26}$$

wobei

$$F_0 = \frac{\pi}{4} a_0^2 = \frac{\pi}{2} \left| \mathfrak{H}_0 \right|^2, F_1 = 0, F_\nu = -\frac{\pi}{2} (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} (\nu^2 - 1) \left| \mathfrak{H}_\nu \right|^2 \tag{27}$$

die Flächeninhalte seiner hypozykloidischen Komponenten $\mathfrak{H}_\nu$ bedeuten die für $\nu = 0$ positiv, für $\nu = 1$ Null und für $\nu > 1$ negativ sind. Sie verschwinden somit für $\nu \neq 1$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{H}$ zu den betreffenden Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ fremd ist, doch kann aus dem Verschwinden des Gesamtflächeninhaltes F nicht auf die Übereinstimmung von $\mathfrak{H}$ mit dem Nullbereich $\mathfrak{O}$ geschlossen werden.

Für die Flächeninhalte $F^{(k)}$ der transformierten Bereiche $\mathfrak{H}^{(k)} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{T}^k$ folgt aus (9) und (27)

$$F^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^k F_\nu = -\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^k (\nu^2 - 1) \mid \mathfrak{H}_\nu \mid^2,$$

woraus durch den in **10** dargestellten Eliminationsprozeß ein Defizitschema abgeleitet werden kann. Die Defizite, die sich dabei für $\mathfrak{H}$ ergeben, sind sodann die mit den Koeffizienten der Polynome $\Phi_n(\lambda)$ gebildeten Linearkombinationen

$$\Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H}) = \sum_{m=0}^{\infty} A'_{n\,m} F^{(m)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_n(c_\nu)(\nu^2-1) \mid \mathfrak{H}_\nu \mid^2 \quad (29)$$

aus den Flächeninhalten der ersten $n+2$-Bereiche der Folge $\mathfrak{H}^{(k)}$, die auch aus der unendlichen Reihe (26) durch Transformation mittels der Matrix $\Phi_n(c_\nu)$ erhalten werden. Es ist jedoch zu beachten, daß $\Delta_0^0(\mathfrak{H}) = F$ als Defizit unbrauchbar ist, da aus $\Delta_0^0(\mathfrak{H}) = F = 0$ nicht auf die Übereinstimmung von $\mathfrak{H}$ mit dem Nullbereich $\mathfrak{O}$ geschlossen werden kann. Desgleichen scheidet das Defizit $\Delta_1^0(\mathfrak{H})$ aus, da darin der Absolutbetrag von $\mathfrak{H}_1$ nicht auftritt und somit $\Delta_1^0(\mathfrak{H})$ verschwinden kann, trotzdem der Bereich eine nicht verschwindende Komponente aus $\mathfrak{K}_1$ enthält. Die höheren Defizite $\Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H})$ $(n > 0)$ sind jedoch geeignet, die Zugehörigkeit des Bereiches $\mathfrak{H}$ zu einer der Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ $(n \geqq 1)$ zu entscheiden.

Der Umstand, daß in (28) der Absolutbetrag der ersten Komponente $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{H}$ nicht auftritt, hat zur Folge, daß aus (26) bereits durch Transformation mittels der Matrix $\dfrac{\Phi_n(\lambda)}{\lambda - c_1}$ eine Defizitfolge für $\mathfrak{H}$ erhalten wird. *Die Defizite dieser Folge sind sodann die mit den Koeffizienten der Polynome* $\dfrac{\Phi_n(\lambda)}{\lambda - c_1}$ *gebildeten Linearkombinationen*

$$\Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H}) = \sum_{m=0}^{n} B_{n\,m} F^{(m)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_n(c_\nu)}{c_\nu - c_1} (\nu^2 - 1) \mid \mathfrak{H}_\nu \mid^2$$

aus den Flächeninhalten der ersten $n+1$*-Bereiche der Folge* $\mathfrak{H}^{(k)}$, die für $n > 0$ die Zugehörigkeit von $\mathfrak{H}$ zu den Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ entscheiden.

Beschränkt man sich auf Bereiche $\mathfrak{H}$, die zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremd sind, dann entfällt die Notwendigkeit der Elimination von $\mid \mathfrak{H}_0 \mid^2$ aus (28) und es kann daher eine Defizitfolge für $\mathfrak{H}$ gebildet werden, deren *Defizite, die mit den Koeffizienten der Polynome* $\dfrac{\Phi_n(\lambda)}{(\lambda - c_0)(\lambda - c_1)}$ *gebildeten Linearkombinationen*

$$\Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H}) = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n\,m} F^{(m)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_n(c_\nu)}{(c_\nu - c_0)(c_\nu - c_1)} (\nu^2 - 1) |\mathfrak{H}_\nu|^2 \tag{30}$$

aus den Flächeninhalten der ersten n-Bereiche der Folge $\mathfrak{H}^{(k)}$ *sind.* Diese Folge entscheidet sodann gleichfalls die Zugehörigkeit von $\mathfrak{H}$ zu den Polynombereichsklassen $\mathfrak{L}_n$ $(n > 0)$.

An Stelle der Flächeninhalte der Bereiche $\mathfrak{H}$ können auch die gewöhnlichen (isoperimetrischen) Defizite $\Delta(\mathfrak{H})$ derselben zur Herleitung eines Defizitschemas verwendet werden. Es gilt nämlich

$$\Delta(\mathfrak{H}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta(\mathfrak{H}_\nu) = 2\pi^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2), \tag{31}$$

wobei

$$\Delta(\mathfrak{H}_0) = 0, \Delta(\mathfrak{H}_1) = 0, \Delta(\mathfrak{H}_\nu) = -4\pi F_\nu = 2\pi^2 (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2) = 2\pi^2 (\nu^2 - 1) |\mathfrak{H}_\nu|^2$$

die gewöhnlichen (isoperimetrischen) Defizite der hypozykloidischen Komponenten $\mathfrak{H}_\nu$ von $\mathfrak{H}$ bedeuten, die für $\nu > 1$ sämtliche nicht negativ sind und dann und nur dann verschwinden, wenn $\mathfrak{H}$ zu den betreffenden Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ fremd ist. Aus $\Delta(\mathfrak{H}) = 0$ folgt daher, daß der Bereich $\mathfrak{H}$ der Klasse $\mathfrak{L}_1$ angehört.

Für die Defizite $\Delta(\mathfrak{H}^{(k)})$ der transformierten Bereiche $\mathfrak{H}^{(k)}$ folgt aus (15) und (31)

$$\Delta(\mathfrak{H}^{(k)}) = \sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu^k \Delta(\mathfrak{H}_\nu) = 2\pi^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu^k (\nu^2 - 1) |\mathfrak{H}_\nu|^2, \tag{32}$$

woraus durch den in **10** dargestellten Eliminationsprozeß ein Defizitschema abgeleitet werden kann. Da in (32) die Absolutbeträge der nullten und der ersten Komponente von $\mathfrak{H}$ nicht auftreten, so entfällt daher die Notwendigkeit ihrer Elimination aus diesen Reihen. Es kann daher für $\mathfrak{H}$ eine Defizitfolge gebildet werden, deren *Defizite die mit den Koeffizienten* $C_{n\,m}$ *der Polynome* $\dfrac{\Phi_n(\lambda)}{(\lambda - c_0)(\lambda - c_1)}$ *gebildeten Linearkombinationen*

$$\Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H}) = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n\,m} \Delta(\mathfrak{H}^{(m)}) = 2\pi^2 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} \frac{\Phi_n(c_\nu)}{(c_\nu - c_0)(c_\nu - c_1)} (\nu^2 - 1) |\mathfrak{H}_\nu|^2 \tag{33}$$

aus den gewöhnlichen (isoperimetrischen) Defiziten der ersten n-Bereiche der Folge $\mathfrak{H}^{(k)}$ *sind.* Diese Defizitfolge beginnt allerdings erst mit dem

Glied $\Delta_2^0(\mathfrak{H})$ und entscheidet demgemäß die Zugehörigkeit von $\mathfrak{H}$ zu der Polynombereichsklasse $\mathfrak{L}_n$ $(n > 0)$.

Wegen $\Delta(\mathfrak{H}_\nu) = -4\pi F_\nu$, für $\nu > 1$, stimmt (33) für Bereiche, die zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremd sind bis auf den konstanten Faktor -4π mit (30) überein. Für Bereiche, die jedoch eine Komponente aus $\mathfrak{K}_0$ enthalten, ergibt sich (33) indem in (30) die Flächeninhalte $F^{(m)}$ durch die gewöhnlichen (isoperimetrischen) Defizite $\Delta(\mathfrak{H}^{(m)})$ der Bereiche $\mathfrak{H}^{(m)}$ ersetzt werden.

11. Spezielle Defizitfolgen.

Wir weisen nunmehr auf einige Beispiele von linearen Transformationen der stützbaren Bereiche vom Faltungstypus (8) hin, die zur Aufstellung von Defizitfolgen besonders geeignet sind.

Die einfachsten Transformationen dieser Art sind die *Evolutenbildung* $\mathfrak{T}$ und die *Evolutenbildung* $\mathfrak{S}$ der stützbaren Bereiche die analytisch durch die *Differentiation*, bzw. *Integration* der Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ vermittelt werden. Sie erweisen sich als die Faltungen des Bereiches $\mathfrak{H}$ mit den Polynombereichsfolgen

$$\mathfrak{T}(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} -\nu \sin \nu\varphi$$

bzw.

$$\mathfrak{S}(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu\varphi, \tag{34}$$

die beide ungerade, somit fremd zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ und daher Nullteiler von $\mathfrak{R}$ sind. Jede dieser Transformationen ist daher nur in der Menge der zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremden stützbaren Bereiche jeweils durch die andere Transformation eindeutig umkehrbar.

Die Evolutenbildung $\mathfrak{T}$ wird durch die Differentiation der Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ vermittelt und ordnet daher jeder Schar von Parallelbereichen einen gemeinsamen Evolutenbereich zu der zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremd ist. Die Integration der Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ ergibt dagegen dann und nur dann die Stützgeradenfunktion eines stützbaren Bereiches, wenn der Bereich $\mathfrak{H}$ als zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremd vorausgesetzt wird. In diesem Falle gibt es sodann eine einparametrige Schar paralleler Evolventenbereiche von $\mathfrak{H}$, in der jedoch ein und nur ein zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremder Bereich enthalten ist. Dieser ergibt sich aus $\mathfrak{H}$ durch Faltung

mit der Polynombereichsfolge $\mathfrak{S}(\varphi)$ (34). Wird daher die Evolventenbildung eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ als dessen Faltung mit $\mathfrak{S}(\varphi)$ erklärt, dann wird dadurch jedem zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremden stützbaren Bereich eindeutig ein ebensolcher Evolventenbereich zugeordnet. Wegen der Fremdheit von $\mathfrak{S}(\varphi)$ zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ wird daher den Bereichen einer Parallelschar eindeutig der Evolventenbereich des in dieser Schar enthaltenen und zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremden Bereiches zugeordnet.

Die Normbereichsfolgen von $\mathfrak{T}(\varphi)$, bzw. $\mathfrak{S}(\varphi)$ besitzen die Koordinaten $c_\nu = \nu^2$, bzw. $c_\nu^* = \dfrac{1}{\nu^2}$, so daß sich für die Polynome (16)

$$\Phi_n(\lambda) = \lambda \prod_{\nu=1}^{n} (\lambda - \nu^2), \text{ bzw. } \Phi_n^*(\lambda) = \lambda \prod_{\nu=1}^{n} \left(\lambda - \frac{1}{\nu^2}\right)$$

ergibt. Die Defizite höherer Ordnung von $\mathfrak{H}$ sind sodann die mit den Koeffizienten $A'_{n\,m}$, bzw. $A^{*'}_{n\,m}$ dieser Polynome gebildeten Linearkombinationen

$$\Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H}) = \sum_{m=0}^{n+1} A'_{n\,m} \,|\, \mathfrak{H}^{(m)} \,|^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^2 \prod_{\sigma=1}^{n} (\nu^2 - \sigma^2) \,|\, \mathfrak{H}_\nu \,|^2 \geqq 0 \qquad (35)$$

bzw.

$$(-1)^n \Delta^0_{n+1}(\mathfrak{H}) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n+1} A^{*'}_{n\,m} \,|\, \mathfrak{H}^{(m)} \,|^2 =$$

$$= (-1)^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \prod_{\sigma=1}^{n} \left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right) \,|\, \mathfrak{H}_\nu \,|^2 \geqq 0 \qquad (36)$$

aus den Quadraten der absoluten Beträge der ersten $n+2$-Bereiche der Folgen $\mathfrak{H}^{(k)} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{T}^k$, bzw. $\mathfrak{H}^{(k)} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{S}^k$, sofern im Falle der Evolutenbildung $\mathfrak{T}$ ihre Existenz durch eine entsprechend oftmalige Differenzierbarkeit der Stützgeradenfunktion $\mathfrak{H}(\varphi)$ gesichert ist. Wegen der Monotonie der c_ν sind im Falle der Evolutenbildung $\mathfrak{T}$ sämtliche nicht verschwindenden Defizite positiv, während sie im Falle der Evolutenbildung $\mathfrak{S}$ im Vorzeichen alternieren. Die Ungleichungen (35), bzw. (36) können daher zur Abschätzung von $|\, \mathfrak{H}^{(m+1)} \,|^2$ verwendet werden, sofern $|\, \mathfrak{H}^{(k)} \,|^2$ für $k \leqq n$ bekannt ist.

Die Ungleichung (35) stellt für $n = 1$ das Lemma von *Wirtinger*

$$\Delta^0_2(\mathfrak{H}) = |\, \mathfrak{H}^{(2)} \,|^2 - |\, \mathfrak{H}^{(1)} \,|^2 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} [\ddot{\mathfrak{H}}(\varphi)]^2 \, d\varphi - \int_0^{2\pi} [\dot{\mathfrak{H}}(\varphi)]^2 \, d\varphi\right] =$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 (\nu^2 - 1) \,|\, \mathfrak{H}_\nu \,|^2 \geqq 0$$

dar, während sich die anderen Ungleichungen als Verallgemeinerungen desselben erweisen.

Nach **11** können bei Beachtung der dort gegebenen Hinweise an Stelle der Absolutbeträge der Bereiche $\mathfrak{H}^{(k)}$ auch deren Flächeninhalte $F^{(k)}$ oder deren gewöhnliche (isoperimetrischen) Defizite $\Delta(\mathfrak{H}^{(k)})$ zur Bildung von Defizitfolgen verwendet werden.

Als Verallgemeinerungen der Evolutenbildung $\mathfrak{T}(\varphi)$ und der Evolutenbildung $\mathfrak{S}(\varphi)$ der stützbaren Bereiche $\mathfrak{H}$ ergeben sich die *α-Evolutoidenbildung* $\mathfrak{T}(\alpha, \varphi)$ und die *α-Evolventoidenbildung* $\mathfrak{S}(\alpha, \varphi)$, die sich als Faltungen der Bereiche $\mathfrak{H}$ mit den Polynombereichsfolgen

$$\mathfrak{T}(\alpha, \varphi) = \frac{\cos\alpha}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\cos\alpha \cos\nu\varphi - \nu \sin\alpha \sin\nu\varphi)$$

bzw.

$$\mathfrak{S}(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\cos\alpha} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \nu^2 \sin^2\alpha} \cos\nu\varphi + \frac{\nu \sin\alpha}{\cos^2\alpha + \nu^2 \sin^2\alpha} \sin\nu\varphi \right) \tag{37}$$

erweisen. Für $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ist jede dieser Transformationen jeweils durch die andere Transformation eindeutig umkehrbar. Die Evolutoidenbildung wird für $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ zur Evolutenbildung $\mathfrak{T}(\varphi)$, bzw. zu deren Zusammensetzung mit der Umorientierung der stützbaren Bereiche; dagegen ist die Evolventoidenbildung für $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ durch (37) zunächst nicht definiert. In der Menge der zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ fremden Bereiche wird jedoch die Evolventoidenbildung für $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ zur Evolventenbildung $\mathfrak{S}(\varphi)$ (34), bzw. zu deren Zusammensetzung mit der Umorientierung der stützbaren Bereiche.

Die Evolutoidenbildung $\mathfrak{T}(\alpha, \varphi)$ und die Evolventoidenbildung $\mathfrak{S}(\alpha, \varphi)$ können zur Aufstellung von Defizitfolgen für stützbare Bereiche verwendet werden. Es ist bemerkenswert, daß sich dabei Defizitfolgen ergeben, deren Defizite sich lediglich durch konstante Faktoren von (35) und (36) unterscheiden.

Ein weiteres bemerkenswertes Beispiel einer linearen Transformation der stützbaren Bereiche $\mathfrak{H}$ stellt deren Faltung mit der *Abel-Poisson*schen Polynombereichsfolge

$$\mathfrak{T}(r,\varphi) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\varphi+r^2)} = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \cos\nu\varphi,\ 0<r<1 \quad (38)$$

dar. Diese lineare Transformation der stützbaren Bereiche ist insofern von besonderem Interesse, als die Polynombereichsfolge $\mathfrak{T}(r,\varphi)$ (38) der Funktiongleichung

$$\mathfrak{T}^n(r,\varphi) = \mathfrak{T}(r^n,\varphi)$$

genügt und somit die Faltungspotenzen von $\mathfrak{T}(r,\varphi)$ durch die zu den Parameterwerten r^n gehörigen Transformationen $\mathfrak{T}(r^n,\varphi)$ dargestellt werden.

Ich beabsichtige über die hier bloß skizzenhaft erwähnten Beispiele im Zusammenhang mit einer geometrischen Interpretation der von *H. Weyl*[6] betrachteten Integration periodischer Funktionen von nicht ganzer Integrationsordnung in einer folgenden Note ausführlich zu berichten. Hiebei sollen sodann weitere Eigenschaften dieser speziellen Defizitfolgen und deren gegenseitige Abhängigkeit eine eingehende Behandlung erfahren.

[6] *H. Weyl*, Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. Vierteljahrschr. d. Naturforsch. Ges., Zürich 62 (1917), p. 296—302.

Reelle birationale Strahlverwandtschaften im Raum als Bilder komplexer ebener Cremonatransformationen.

Von
Fritz Hohenberg, Graz.

(Eingelangt am 10. Juni 1349.)

Die räumlichen Kollineationen und Korrelationen führen Geraden in Geraden über. Daneben kennt man andere Verwandtschaften, die Geraden in Geraden, aber i. a. Punkte (als Träger von Strahlbündeln) nicht mehr in Punkte oder Ebenen überführen. *Jan de Vries*[1], *J. M. Clarkson*[2] und andere haben solche involutorische Strahltransformationen untersucht, bei denen eine allgemeine Raumgerade g vier Geraden aus gewissen einparametrigen Geradenörtern (z. B. aus vier Strahlbüscheln im Raum) schneidet, deren zweite Treffgerade dann g zugeordnet wird. *J. M. Clarkson*[3] hat ferner involutorische Strahltransformationen untersucht, bei denen die Raumgerade mit zwei festen Spurebenen (oder mit einer festen Fläche 2. Grades) geschnitten wird und die Spurebenen (oder die feste Fläche 2. Grades) je einer speziellen involutorischen Cremonatransformation unterworfen werden.

Hier soll ein Verfahren betrachtet werden, das jeder ebenen Punkttransformation eine Transformation des Strahlraums $\mathfrak{S}$ *zuordnet. Jede allgemeine reelle Raumgerade* g *wird mit zwei parallelen Spurebenen* $\mathfrak{E}_1$ *und* $\mathfrak{E}_2$ *geschnitten.* $\mathfrak{E}_1$ *und* $\mathfrak{E}_2$ *werden als Gaußsche Zahlenebenen zweier komplexer Veränderlichen* z_1, *bzw.* z_2 *aufgefaßt, wodurch sich der reellen Raumgeraden* g *der i. a. komplexe Punkt* (z_1, z_2) *einer neuen Hilfsebene* $\mathfrak{E}$ *zuordnen läßt. Jede Punktverwandtschaft in* $\mathfrak{E}$ *ruft dann eine Strahlverwandtschaft im Strahlraum* $\mathfrak{S}$ *hervor.*

---

[1] Ak. Amsterdam Versl. (4) 27 (1919), S. 256, 260.

[2] Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), S. 149—154; 40 (1934), S. 441—448; 43 (1937), S. 142—144.

[3] Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), S. 434—440; 40 (1934), S. 421—424; vgl. auch Enzyklopädie d. math. Wiss. III C, 11, S. 1822.

Nach allgemeinen Erörterungen werden hier die Strahltransformationen untersucht, die den komplexen Affinitäten, insbesondere den gleichsinnigen Ähnlichkeiten der Ebene $\mathfrak{E}$ entsprechen.

1. Abbildung des reellen Strahlraums auf die komplexe Ebene.

Im Strahlraum $\mathfrak{S}$ seien homogene kartesische Koordinaten $\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ eingeführt. $\mathfrak{X}_0 = 0$ sei die Gleichung der Fernebene. Als Spurebenen verwenden wir die horizontalen Ebenen $\mathfrak{E}_1$ $(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0 = 0)$ und $\mathfrak{E}_2$ $(\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0 = 0)$; sie schneiden sich in der Ferngeraden s $(\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_3 = 0)$.

Eine nichthorizontale Gerade g in $\mathfrak{S}$ ist durch ihre Spurpunkte $(1, x_1, y_1, 1)$ und $(1, x_2, y_2, -1)$ auf $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ festgelegt. Aus den Spurpunkten folgen die Linienkoordinaten von g als Unterdeterminanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & -1 \end{matrix} \right\|$$

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} =$$
$$(x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : -2 : -(y_1 + y_2) : (x_1 + x_2) : (x_1\, y_2 - x_2\, y_1), \tag{1}$$

$$x_1 = \frac{p_{01} - p_{31}}{p_{03}},\ y_1 = \frac{p_{23} + p_{02}}{p_{03}};\ x_2 = \frac{-p_{01} - p_{31}}{p_{03}},\ y_2 = \frac{p_{23} - p_{02}}{p_{03}}. \tag{2}$$

Nun sollen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ als *Gauß*sche Zahlenebenen für je eine komplexe Veränderliche

$$z_\nu = x_\nu + i\, y_\nu \ (\nu = 1 \text{ für } \mathfrak{E}_1,\ \nu = 2 \text{ für } \mathfrak{E}_2) \tag{3}$$

aufgefaßt werden. z_1 und z_2 sollen dann als komplexe kartesische Koordinaten in einer neuen Ebene $\mathfrak{E}$ gedeutet werden[4]. Zwischen der Ebene $\mathfrak{E}$ und dem Strahlraum $\mathfrak{S}$ besteht folgender projektive Zusammenhang: die Verbindungsebene $U_0\, \mathfrak{X}_0 + U_1\, (\mathfrak{X}_1 + i\, \mathfrak{X}_2) + U_3\, \mathfrak{X}_3 = 0$ der Geraden g von $\mathfrak{S}$ mit dem absoluten Kreispunkt $\mathfrak{J}\,(0, 1, i, 0)$ auf der Schnittgeraden s von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ lautet

$$(-z_1 - z_2)\, \mathfrak{X}_0 + 2\, (\mathfrak{X}_1 + i \mathfrak{X}_2) + (-z_1 + z_2)\, \mathfrak{X}_3 = 0. \tag{4}$$

Daher ist das Ebenenbündel $\mathfrak{J}$ projektiv auf die Ebene $\mathfrak{E}$ bezogen,

$$U_0 : U_1 : U_3 = (-z_1 - z_2) : 2 : (-z_1 + z_2). \tag{5a}$$

Analog besteht zwischen den Verbindungsebenen $U_0 \mathfrak{X}_0 + U_1 (\mathfrak{X}_1 - i \mathfrak{X}_2) +$

---

[4] Diese Abbildung stammt von *K. Weierstraß* (Werke IV, Leipzig 1892, S. 323).

$+U_3\,\mathfrak{X}_3 = 0$ von $\overline{\mathfrak{J}}\,(0, 1, -i, 0)$ mit den Geraden g und den Punkten der Ebene $\mathfrak{E}$ die Antiprojektivität

$$U_0 : U_1 : U_3 = (-\bar{z}_1 - \bar{z}_2) : 2 : (-\bar{z}_1 + \bar{z}_2). \tag{5b}$$

$\mathfrak{E}$ ist daher projektiv, bzw. antiprojektiv auf die Ebenenbündel $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ bezogen und konjungiert komplexe Ebenen dieser Bündel schneiden sich in der zugehörigen reellen Geraden des Strahlraums $\mathfrak{S}$. Aus (5a) und (2) folgt noch

$$z_1 = (-U_0 - U_3) : U_1, \quad z_2 = (-U_0 + U_3) : U_1 \tag{5c}$$

$$U_0 : U_1 : U_3 = (p_{31} - i p_{23}) : p_{03} : (-p_{01} - i p_{02}). \tag{5d}$$

Es liegt nahe, nach dem *Zusammenhang dieser Abbildung mit der bekannten kinematischen Abbildung des Strahlraums*[5] zu fragen. Bildet man den Strahlraum kinematisch auf $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ ab und faßt wieder $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ als *Gauß*sche Zahlenebenen für die neuen komplexen Veränderlichen η_1 und η_2 auf, dann ist jedem reellen Strahl g von $\mathfrak{S}$ ein komplexer Punkt (η_1, η_2) der Hilfsebene $\mathfrak{E}$ zugeordnet. Es läßt sich zeigen, daß (η_1, η_2) aus dem früheren Bildpunkt (z_1, z_2) in $\mathfrak{E}$ durch eine perspektive Affinität mit dem charakteristischen Teilverhältnis i hervorgeht; die Affinitätsachse ist die Gerade $z_1 = z_2$, die Affinitätsstrahlen stehen darauf senkrecht.

2. Abbildung von Kurven in $\mathfrak{E}$ auf den Strahlraum.

In der Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{S}$ entspricht einer *Geraden*

$$z_2 = k\,z_1 + l \tag{6}$$

von $\mathfrak{E}$ ein Drehnetz mit lotrechter Achse in $\mathfrak{S}$, die Achse geht durch die Punkte $z_1 = z_2 = \dfrac{l}{1-k}$ in $\mathfrak{E}_1$, bzw. $\mathfrak{E}_2$, die eine Brennlinie des Drehnetzes geht in der Höhe

$$\mathfrak{X}_3 : \mathfrak{X}_0 = (k+1) : (k-1) \tag{6a}$$

durch den absoluten Kreispunkt $\mathfrak{J}\,(0, 1, i, 0)$ auf s, die andere ist dazu konjugiert komplex. Hat die Gerade in $\mathfrak{E}$ eine reelle Richtung (k reell, $l = l_1 + i l_2$), so entsprechen ihren reellen und komplexen Punkten die reellen Strahlen eines Bündels mit dem Träger

---

[5] Vgl. z. B. *W. Blaschke*, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Z. Math. Phys. 60 (1911), S. 61–91, 203ff.; *J. Grünwald*, Ein Abbildungsprinzip ....., Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss., Wien, IIa, 120 (1911), S. 677–741; *E. Müller*, Vorl. ü. darstellende Geometrie, Bd. 1, Die linearen Abbildungen, her. v. *E. Kruppa* (1923), S. 240ff.

$$\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 = (k-1) : (-l_1) : (-l_2) : (k+1). \tag{6b}$$

Daraus folgt auch, daß sich zwei Geraden in $\mathfrak{S}$ schneiden, wenn die zugehörigen Punkte in $\mathfrak{E}$ eine Verbindungsgerade reeller Richtung haben.

Ist allgemeiner eine *Kurve*

$$z_2 = f(z_1) \tag{7}$$

oder nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$x_2 = f_1(x_1, y_1), \quad y_2 = f_2(x_1, y_1) \tag{8}$$

in $\mathfrak{E}$ gegeben, so entspricht ihr in $\mathfrak{S}$ eine Strahlkongruenz

$$p_{ik} = \begin{Vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & f_1(x_1, y_1) & f_2(x_1, y_1) & -1 \end{Vmatrix} \tag{9}$$

(Parameter x_1 und y_1). Man kann auch (2) in (8) einsetzen, dann erhält man statt der Parameterdarstellung (9) zwei Gleichungen zwischen den p_{ik}.

Um die durch einen gegebenen Punkt $(\mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$ in $\mathfrak{S}$ gehenden Kongruenzstrahlen zu finden, bedenke man, daß die Spurpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) einer durch $(\mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$ gehenden Raumgeraden untereinander durch

$$(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0)\, x_2 = (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\, x_1 - 2\mathfrak{X}_1, \; (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0)\, y_2 = (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\, y_1 - 2\mathfrak{X}_2 \tag{10}$$

zusammenhängen. Aus (8) und (10) folgt, daß die Schnittpunkte von $\mathfrak{E}_1$ mit den durch $(\mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$ gehenden Kongruenzstrahlen aus

$$\begin{aligned} (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) f_1(x_1, y_1) &= (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\, x_1 - 2\mathfrak{X}_1, \\ (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) f_2(x_1, y_1) &= (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\, y_1 - 2\mathfrak{X}_2 \end{aligned} \tag{11}$$

zu berechnen sind. Ist nun $(\mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$ ein Punkt der Brennfläche von (9), so müssen zwei durch ihn gehende Kongruenzstrahlen zusammenfallen, die beiden Kurven (11) in $\mathfrak{E}_1$ müssen sich in einem Punkt (x_1, y_1) berühren. Das ergibt nach kurzer Rechnung

$$\mathfrak{X}_0 : (\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2) : \mathfrak{X}_3 = [f'(z_1) - 1] : [z_1 f'(z_1) - f(z_1)] : [f'(z_1)] + 1]. \tag{12}$$

Andererseits bestimmt die Kurve (7) in $\mathfrak{E}$ zufolge (5c) in $\mathfrak{S}$ einen Kegel

$$\frac{-U_0 + U_3}{U_1} = f\left(\frac{-U_0 - U_3}{U_1}\right) \tag{13}$$

mit der Spitze $\mathfrak{Z}$ und einen konjugiert komplexen Kegel mit der Spitze $\overline{\mathfrak{Z}}$. Jede Tangentialebene des einen Kegels schneidet die konjugiert komplexe Tangentialebene des anderen Kegels in einem reellen Kongruenzstrahl. *Diese beiden Kegel bilden also die Brennfläche der Kongruenz*

(durch (13) in Ebenenkoordinaten und durch (12) in Punktkoordinaten dargestellt).

Zugleich erkennt man *die in der Kongruenz enthaltenen Torsen*: jede Tangentialebene des einen Kegels schneidet den anderen Kegel nach einer Kurve, deren Tangenten eine in der Kongruenz enthaltene (spezielle) Torse bilden. Dazu kommt noch eine *ausgezeichnete Torse, gebildet aus den Tangenten der reellen Schnittkurve beider Kegel.* Man erkennt, daß für diese Tangenten $f'(z_1)$ reell ist. Die reellen Tangenten der reellen Schnittkurve beider Kegel sind also die Bilder jener reellen oder komplexen Punkte der Kurve (7) in $\mathfrak{E}$, in denen die Kurventangente reelle Richtung hat.

3. Cremonatransformationen in $\mathfrak{E}$ und in $\mathfrak{S}$.

Es sei nun in $\mathfrak{E}$ eine Cremonatransformation

$$\begin{cases} 1 : z_1' : z_2' = F_0(z_1, z_2) : F_1(z_1, z_2) : F_2(z_1, z_2) \\ 1 : z_1 : z_2 = \Phi_0(z_1', z_2') : \Phi_1(z_1', z_2') : \Phi_2(z_1', z_2') \end{cases} \tag{14}$$

gegeben, wo die Polynome F_ν und Φ_ν höchstens den Grad n haben sollen. Trennung von Real- und Imaginärteil möge

$$\begin{cases} F_\nu(z_1, z_2) = F_{\nu 1}(x_1, y_1, x_2, y_2) + i F_{\nu 2}(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ \Phi_\nu(z_1' z_2') = \Phi_{\nu 1}(x_1', y_1', x_2', y_2') + i \Phi_{\nu 2}(x_1', y_1', x_2', y_2') \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, 2) \tag{15}$$

ergeben. Dann ist

$$\begin{aligned} &1 : x_1' : y_1' : x_2' : y_2' = \\ &= (F_{01}^2 + F_{02}^2) : (F_{01}F_{11} + F_{02}F_{12}) : (F_{01}F_{12} - F_{02}F_{11}) : (F_{01}F_{21} + F_{02}F_{22}) : \\ &\qquad : (F_{01}F_{22} - F_{02}F_{21}) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &p_{01}' : p_{02}' : p_{23}' : p_{22}' : p_{31}' : p_{12}' = \\ &= [F_{01}(F_{21} - F_{11}) + F_{02}(F_{22} - F_{12})] : [F_{01}(F_{22} - F_{12}) - F_{02}(F_{21} - F_{11})] : \\ &: -2[F_{01}^2 + F_{02}^2] : [-F_{01}(F_{22} + F_{12}) + F_{02}(F_{21} + F_{11})] : [F_{01}(F_{21} + F_{11}) + \\ &\qquad + F_{02}(F_{22} + F_{12})] : [F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}] \end{aligned} \tag{17}$$

und hierin sind für die x_1, y_1, x_2, y_2 laut (2) die p_{ik} einzusetzen. Die Umkehrformeln ergeben sich aus (17), indem man $F_{\lambda\mu}$ durch $\Phi_{\lambda\mu}$ ersetzt.

Die Strahltransformation (17) in $\mathfrak{S}$ *hat also i. a. den Grad* $2n$, d. h. einem linearen Strahlkomplex entspricht ein Komplex $2n$-ten Grades. Der Grad kann sich erniedrigen, nämlich wenn die in (17) rechts stehenden Ausdrücke einen gemeinsamen Faktor haben.

Durch die Cremonatransformation in $\mathfrak{E}$ wird in den Bündeln $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ des Strahlraums $\mathfrak{S}$ ebenfalls je eine Cremonatransformation induziert, und zwar im Bündel $\mathfrak{J}$

$$U_0' : U_1' : U_3' = (-F_1 - F_2) : 2F_0 : (-F_1 + F_2),$$

$$F_\nu = F_\nu \left(\frac{-U_0 - U_3}{U_1}, \frac{-U_0 + U_3}{U_1} \right), \qquad (18)$$

und im Bündel $\overline{\mathfrak{J}}$ die zu (18) konjugiert komplexe Transformation. Jeder Strahlkongruenz, deren Brennfläche aus zwei konjugiert komplexen Kegeln mit den Spitzen $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ besteht, entspricht eine Strahlkongruenz mit ebensolcher Brennfläche.

Einem Festpunkt der Transformation (14) in $\mathfrak{E}$ entspricht ein Feststrahl der Transformation (17) in $\mathfrak{S}$. Die Transformation (14) in $\mathfrak{E}$ hat i. a. $n^2 - 1$ Hauptpunkte, die in verschiedener Weise zusammenrücken können. Einem r-fachen Hauptpunkt entspricht eine rationale Kurve r-ter Ordnung in $\mathfrak{E}$. In $\mathfrak{S}$ entspricht daher einem r-fachen „Hauptstrahl" der Verwandtschaft (17) eine Strahlkongruenz, deren Brennfläche aus zwei konjugiert komplexen Kegeln rn. Klasse mit den Spitzen $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ besteht. Zugleich gehört dazu im Bündel $\mathfrak{J}$, bzw. $\overline{\mathfrak{J}}$ eine r-fache „Hauptebene", der die Tangentialebenen eines Kegels r-ter Klasse mit derselben Spitze entsprechen.

Eine besondere Betrachtung erfordern *die reellen horizontalen Geraden in* $\mathfrak{S}$, weil sie sich der Darstellung (1) entziehen. Eine solche Gerade g in $\mathfrak{S}$ schneidet die Schnittgerade s von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, ihre Verbindungsebenen mit $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ fallen zusammen. Die reellen horizontalen Ebenen des Bündels $\mathfrak{J}$ sind durch $U_1 = 0$ gekennzeichnet. Ergibt sich aus (18) zufolge $U_1 = 0$ auch $U_1' = 0$, so entspricht einer horizontalen Ebene durch $\mathfrak{J}$ wieder eine solche Ebene. Entsprechen derselben reellen horizontalen Ebene ω in den Verwandtschaften in den Bündeln $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ zwei verschiedene horizontale Ebenen ω' und $\overline{\omega'}$, so entspricht jeder Geraden in ω die Gerade s. Ist aber $\omega' = \overline{\omega'}$, also ω' reell, so entspricht jeder Geraden in ω jede Gerade in ω'.

Die rechnerische Behandlung erfolgt, indem man den Strahlraum auf zwei neue Spurebenen bezieht, z. B. auf $\mathfrak{X}_1 = 0$ und $\mathfrak{X}_2 = 0$. Aus den Schnittpunkten eines Strahls mit $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ ergeben sich seine Schnittpunkte $(1, 0, \eta_1, \zeta_1)$ mit $\mathfrak{X}_1 = 0$ und $(1, \xi_2, 0, \zeta_2)$ mit $\mathfrak{X}_2 = 0$ mittels

$$\eta_1 = \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 - x_1}, \zeta_1 = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1}; \xi_2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}, \zeta_2 = \frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1};$$

$$x_1 = \frac{\xi_2(\zeta_1-1)}{\zeta_1-\zeta_2}, y_1 = \frac{-\eta_1(\zeta_2-1)}{\zeta_1-\zeta_2}; x_2 = \frac{\xi_2(\zeta_1+1)}{\zeta_1-\zeta_2}, y_2 = \frac{-\eta_1(\zeta_2+1)}{\zeta_1-\zeta_2}. \tag{19}$$

Analog zu (1) folgt

$$p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} = \xi_2:-\eta_1:(\zeta_2-\zeta_1):\eta_1\zeta_2:\xi_2\zeta_1:-\xi_2\eta_1. \tag{20}$$

Mittels (16) und (19) ergibt sich das Transformationsgesetz der $\eta_1, \zeta_1, \xi_2, \zeta_2$. Durch Grenzübergang $\zeta_2 \to \zeta_1$ ergibt sich die Transformation der allgemeinen horizontalen Geraden. Läßt man schließlich in den Brüchen $\zeta_1:\eta_1$ und $\zeta_2:\xi_2$ Zähler und Nenner unbeschränkt wachsen, bzw. gegen Null rücken und dabei die Brüche allen reellen Grenzwerten zustreben, so erhält man Aufschluß über die Transformation der Ferngeraden von $\mathfrak{S}$, bzw. der horizontalen Geraden, die die x_3-Achse schneiden.

In der Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{S}$ nimmt die *Ferngerade von* $\mathfrak{E}$ eine Sonderstellung ein. Daher werden vor allem solche Verwandtschaften (14) in $\mathfrak{E}$ bei der Übertragung auf $\mathfrak{S}$ einfache Ergebnisse liefern, bei denen die Ferngerade von $\mathfrak{E}$ in sich übergeführt wird. Dann kann $F_0(z_1, z_2) = 1$ gesetzt werden, so daß hier

$$x_1' = F_{11}, y_1' = F_{12}; x_2' = F_{21}, y_2' = F_{22} \tag{16a}$$

$$p_{01}':p_{02}':p_{03}':p_{23}':p_{31}':p_{12}' = (F_{21}-F_{11}):(F_{22}-F_{12}):-2:(-F_{22}-F_{12}): \\ :(F_{21}+F_{11}):(F_{11}F_{22}-F_{12}F_{21}) \tag{17a}$$

ist. Diese sogenannten ganzen birationalen Transformationen in $\mathfrak{E}$ hat *W. E. Jung* untersucht[6]. Ebenso verdienen jene Transformationen in $\mathfrak{E}$ Interesse, bei denen die Ferngerade eine Hauptgerade ist.

4. Deutung der komplexen ebenen Affinitäten im Strahlraum.

Die komplexen Affinitäten in $\mathfrak{E}$, nämlich

$$\begin{cases} z_1' = a_{10} + a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2' = a_{10} + a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{cases} \tag{21}$$

bilden bei komplexen a_{ik} eine von zwölf reellen Parametern abhängige *Gruppe* $\mathfrak{G}_{12}$. Nach (18) und (5c) folgt als zugehörige Transformation im Bündel $\mathfrak{F}$

[6] Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine*, Angew. Math. 184 (1942), S. 161–174.

$$U_0' : U_1' : U_3' = [(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})\ U_0 - (a_{10}+a_{20})\ U_1 + (a_{11}-a_{12}+ \\ +a_{21}-a_{22})\ U_3] : 2U_1 : [(a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22})\ U_0 - (a_{10}-a_{20})\ U_1 + \\ +(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})\ U_3]. \qquad (22)$$

Im Bündel $\mathfrak{J}$ wird also durch (21) die komplexe Kollineation (22) hervorgerufen, im Bündel $\bar{\mathfrak{J}}$ die zu ihr konjugiert komplexe Kollineation. $U_1 = 0$ ergibt $U_1' = 0$, d. h. jeder Ebene durch s entspricht wieder eine Ebene durch s, es bleiben dabei die Ebenen mit

$$U_0 : U_3 = [a_{12}+a_{21} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}] : [a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}] \qquad (23)$$

fest. Diese beiden Ebenen sind i. a. komplex, aber nicht konjugiert komplex, daher entspricht in $\mathfrak{S}$ einer horizontalen Geraden i. a. die Gerade s. Dagegen folgt aus (19) und (20), daß die Geraden der Bündel $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ sich je untereinander vertauschen; zwischen den Höhen ζ und ζ' entsprechender Minimalgeraden besteht die Relation

$$(\zeta'-1) : (\zeta'+1) = [a_{11}(\zeta-1)+a_{12}(\zeta+1)] : [a_{21}(\zeta-1)+a_{22}(\zeta+1)],$$

d. h. in $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ werden die s enthaltenden Strahlbündel von Minimalgeraden gemäß dieser Formel projektiv vertauscht und in den Strahlbüscheln entspricht sich s selbst, ebenso entsprechen sich die Minimalstrahlen, die den eigentlichen Feststrahl der Verwandtschaft in $\mathfrak{S}$ schneiden (dieser Feststrahl entspricht dem eigentlichen Festpunkt der Affinität in $\mathfrak{E}$; Sonderfälle folgen später).

Sind die Festebenen (23) getrennt, bzw. zusammenfallend, so sind auch die festen Fernpunkte der Affinität in $\mathfrak{E}$ getrennt, bzw. zusammenfallend.

Die zu (21) gehörige Strahltransformation in $\mathfrak{S}$ ist nach (17a) i. a. quadratisch. In $\mathfrak{E}$ entspricht jeder Geraden eine Gerade, in $\mathfrak{S}$ entspricht daher einem Drehnetz mit lotrechter Achse, ebenso einem Strahlbündel i. a. ein Drehnetz mit lotrechter Achse, eventuell ein Strahlbündel. Parallele Geraden in $\mathfrak{E}$ gehen in parallele Geraden über; dem entspricht in $\mathfrak{S}$, daß Drehnetze mit gleich hohen Brennlinien (vgl. (6a)) in ebensolche übergehen, d. h. daß die horizontalen Ebenen in $\mathfrak{S}$ untereinander vertauscht werden.

Drei Punkte einer Geraden g in $\mathfrak{E}$ haben ein gegenüber (21) *invariantes Teilverhältnis* t. Den drei Punkten entsprechen in $\mathfrak{S}$ drei Strahlen eines Drehnetzes mit lotrechter Achse. Es zeigt sich, daß die drei Strahlen die eine Brennlinie dieses Netzes in drei Punkten vom gleichen Teilverhältnis t und die andere Brennlinie in drei Punkten vom konjugiert komplexen Teilverhältnis schneiden.

Diese Deutung versagt, wenn g reelle Richtung hat, wenn ihre Punkte also den Strahlen eines Bündels entsprechen. Hier wird man wie im allgemeinen Fall das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden durch die Drehstreckung deuten, die die Bildpunkte in $\mathfrak{E}_1$ in die Bildpunkte in $\mathfrak{E}_2$ überführt.

Wie bildet sich eine *perspektive komplexe Affinität* der Ebene $\mathfrak{E}$ im Strahlraum $\mathfrak{S}$ ab? Haben die Affinitätsachse a und die Affinitätsstrahlen g komplexe Richtung, so bestimmt a ein Drehnetz mit den Brennlinien $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$, dessen Strahlen einzeln festbleiben. Alle Affinitätsstrahlen in $\mathfrak{E}$ sind parallel und bestimmen daher in $\mathfrak{S}$ Drehnetze, deren Brennlinien nach (6a) in denselben beiden horizontalen Ebenen ε_1 und ε_2 liegen. Wird nun in $\mathfrak{E}$ ein Punkt P der Affinität unterworfen, so bestimmt man auf dem Affinitätsstrahl durch P jenen Punkt P', der zusammen mit P und dem Schnittpunkt P_0 mit a das vorgegebene charakteristische Teilverhältnis t hat. In $\mathfrak{S}$ hat man daher den P entsprechenden Strahl $\mathfrak{p}$ mit ε_1 und ε_2 zu schneiden und den einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{F}$, den anderen mit $\bar{\mathfrak{F}}$ zu verbinden; dies ergibt die Brennlinien $\mathfrak{g}$ und $\bar{\mathfrak{g}}$ des Drehnetzes, das dem Affinitätsstrahl g durch P entspricht. Dann schneiden sich die Ebenen $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}]$ und $[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{g}}]$ im reellen Bildstrahl $\mathfrak{p}_0$ von P_0. Den Bildstrahl $\mathfrak{p}'$ von P' findet man daraus, daß er $\mathfrak{g}$ in einem Punkt schneidet, der mit den Schnittpunkten von $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{g}$ das Teilverhältnis t bestimmt; ebenso schneidet er $\bar{\mathfrak{g}}$ in einem Punkt, der mit den Schnittpunkten von $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{g}$ das Teilverhältnis $\bar{t}$ bestimmt.

Die durch (21) zufolge (17a) bestimmte Strahltransformation ist i. a. quadratisch. Sie ist i. a. nicht in einer Punkttransformation des Strahlraums $\mathfrak{S}$ enthalten, vielmehr entspricht einem Strahlbündel i. a. ein Drehnetz mit lotrechter Achse. *Wenn aber einem Strahlbündel wieder ein Strahlbündel entsprechen soll, müssen in $\mathfrak{E}$ alle Geraden reeller Richtung in ebensolche übergehen*, d. h. die Affinität in $\mathfrak{E}$ muß

$$\begin{cases} z_1' = a_{10} + e^{i\alpha}\,(A_{11}\,z_1 + A_{12}\,z_2) \\ z_2' = a_{20} + e^{i\alpha}\,(A_{21}\,z_1 + A_{22}\,z_2) \end{cases} \tag{24}$$

lauten, wo A_{ik} reelle Zahlen sind. Diese Affinitäten bilden eine von neun reellen Parametern abhängige *Untergruppe* $\mathfrak{G}_9$ *von* $\mathfrak{G}_{12}$. In $\mathfrak{S}$ geht nach (22) jede reelle horizontale Ebene in eine ebensolche über. Nach (23) sind die horizontalen Festebenen beide reell oder konjugiert komplex. Mittels (6b) ergibt sich aus (24) die zugehörige Transformation in $\mathfrak{S}$, nämlich die Kollineation

$$\begin{cases} (\mathfrak{X}_3' - \mathfrak{X}_0') : (\mathfrak{X}_3' + \mathfrak{X}_0') = [A_{11}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) + A_{12}(\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)] : [A_{21}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) + A_{22}(\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)] \\ \dfrac{\mathfrak{X}_1' + i\mathfrak{X}_2'}{\mathfrak{X}_0'} = \\ \dfrac{a_{10}[A_{21}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) + A_{22}(\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)] - a_{20}[A_{11}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) + A_{12}(\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)] + 2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) e^{i\alpha}(\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2)}{(A_{21} - A_{11})(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0) + (A_{22} - A_{12})(\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_0)} \end{cases} \tag{25}$$

Dies zeigt, daß *entsprechende horizontale Ebenen gleichsinnig ähnlich aufeinander bezogen* sind (doch ist die Kollineation im Gesamtraum i. a. keine Ähnlichkeit).

Ist die Affinität (24) *perspektiv und haben die Affinitätsachse und die Affinitätsstrahlen reelle Richtungen in* $\mathfrak{E}$, so entspricht der Affinitätsachse a ein Strahlbündel $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{S}$, jedem Affinitätsstrahl g entspricht ein Strahlbündel in $\mathfrak{S}$, dessen Träger nach (6b) in einer bestimmten reellen horizontalen Ebene γ liegt. Legt man durch einen Punkt P von $\mathfrak{E}$ den Affinitätsstrahl g, so entspricht dem Schnittpunkt P_0 von g mit a der Verbindungsstrahl von $\mathfrak{a}$ mit dem Schnittpunkt von γ mit dem zu P gehörigen Strahl $\mathfrak{p}$. Daher entspricht dieser speziellen perspektiven Affinität in $\mathfrak{E}$ *im Strahlraum* $\mathfrak{S}$ *eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum* $\mathfrak{a}$ *und der Kollineationsebene* γ. Ihr charakteristisches Doppelverhältnis ist gleich dem charakteristischen Teilverhältnis der Affinität in $\mathfrak{E}$.

Schließlich sei auf den *Sonderfall* $a_{12} = a_{21} = 0$ hingewiesen, wo die Fernpunkte der Koordinatenachsen in $\mathfrak{E}$ Festpunkte sind. Auf diesen Fall kann man die allgemeine komplexe Affinität (21) durch Ausübung einer affinen Koordinatentransformation in $\mathfrak{E}$ (d. h. durch Ausübung einer bestimmten Affinität in $\mathfrak{E}$, bzw. einer bestimmten quadratischen Strahltransformation in $\mathfrak{S}$) zurückführen, wenn die Affinität (21) in $\mathfrak{E}$ wenigstens zwei verschiedene feste Fernpunkte aufweist. Im Falle $a_{12} = a_{21} = 0$ erfahren $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ je eine gleichsinnige Ähnlichkeit, so daß die quadratische Strahltransformation hier besonders übersichtlich wird. Haben überdies a_{11} und a_{22} dieselbe Amplitude, so gehört die Affinität zu $\mathfrak{G}_9$ und erzeugt in $\mathfrak{S}$ eine Kollineation, die jede reelle horizontale Ebene in eine ebensolche und $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ je in sich überführt.

5. Deutung der komplexen ebenen gleichsinnigen Ähnlichkeiten im Strahlraum.

Die komplexen gleichsinnigen Ähnlichkeiten

$$\begin{cases} z_1' = a_{10} + a(z_1 \cos\varphi - z_2 \sin\varphi) \\ z_2' = a_{20} + a(z_1 \sin\varphi + z_2 \cos\varphi) \end{cases} \tag{26}$$

$$a_{\nu 0} = b_{\nu 0} + i c_{\nu 0}\ (\nu = 1, 2),\ a = a_1 + i a_2,\ \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,$$

$\cos\varphi = \cos\varphi_1 \mathit{Ch}\,\varphi_2 - i \sin\varphi_1 \mathit{Sh}\,\varphi_2$, $\sin\varphi = \sin\varphi_1 \mathit{Ch}\,\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \mathit{Sh}\,\varphi_2$ bilden eine von acht reellen Parametern abhängige *Untergruppe* $\mathfrak{G}_8$ der durch (21) bestimmten $\mathfrak{G}_{12}$. Eine wichtige *Untergruppe* $\mathfrak{G}_7$ *von* $\mathfrak{G}_8$ bilden *die komplexen gleichsinnigen Ähnlichkeiten mit reellem Drehwinkel* ($\varphi_2 = 0$). $\mathfrak{G}_7$ ist zugleich eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_9$.

Nach (18) wird durch (26) im Bündel $\mathfrak{J}$ die Kollineation

$$\begin{aligned} U_0' : U_1' : U_3' = [2aU_0\cos\varphi - (a_{10} + a_{20})U_1 + 2aU_3\sin\varphi] : 2U_1 : \\ : [-2aU_0\sin\varphi - (a_{10} - a_{20})U_1 + 2aU_3\cos\varphi] \end{aligned} \tag{27}$$

hervorgerufen, im Bündel $\bar{\mathfrak{J}}$ die konjugiert komplexe Kollineation. In beiden Bündeln werden die horizontalen Ebenen projektiv vertauscht. Festebenen sind in beiden Bündeln die Ebenen

$$\mathfrak{X}_3 = \pm i\,\mathfrak{X}_0, \tag{28}$$

die wir mit $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ bezeichnen.

Die $\mathfrak{G}_8$ der komplexen gleichsinnigen Ähnlichkeiten in $\mathfrak{E}$ ist demnach auf eine $\mathfrak{G}_8$ von quadratischen Strahltransformationen in $\mathfrak{S}$ abgebildet, bei denen $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$, aber auch die Punkte $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ je in sich übergehen. Gehört die Ähnlichkeit in $\mathfrak{E}$ zu $\mathfrak{G}_7$, so entspricht ihr in $\mathfrak{S}$ eine Kollineation, die $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$, sowie $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ in sich überführt. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}_7$ *der komplexen gleichsinnigen Ähnlichkeiten in* $\mathfrak{E}$, *die reelle Richtungen in ebensolche überführen, ist demnach auf die Gruppe der quasielliptischen Geometrie in* $\mathfrak{S}$ *abgebildet, deren absolutes Gebilde aus* $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ *besteht.* Ihre Transformationen lauten wegen (25)

$$\begin{cases} (\mathfrak{X}_3' - \mathfrak{X}_0') : (\mathfrak{X}_3' + \mathfrak{X}_0') = [(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0)\cos\varphi - (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\sin\varphi] : [\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0)\sin\varphi + (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\cos\varphi] \\ \dfrac{\mathfrak{X}_1' + i\mathfrak{X}_2'}{\mathfrak{X}_0'} = \\ \dfrac{a_{10}[(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0)\sin\varphi + (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\cos\varphi] - a_{20}[(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0)\cos\varphi - (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_0)\sin\varphi] + 2a(\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2)}{2\,(\mathfrak{X}_3\sin\varphi + \mathfrak{X}_0\cos\varphi)} \end{cases} \tag{29}$$

Daher werden die horizontalen Ebenen in $\mathfrak{S}$ projektiv vertauscht; entsprechende horizontale Ebenen sind gleichsinnig ähnlich. Für $\varphi = 0$ (komplexe zentrische Ähnlichkeit in $\mathfrak{E}$) bleibt in $\mathfrak{S}$ jede horizontale Ebene fest. *Der Winkel zweier komplexen Geraden* $z_2 = kz_1 + l$ und $z_2 = k' z_1 + l'$ in $\mathfrak{E}$ ist durch

$$tg\,\Phi = \frac{k' - k}{1 + k\,k'} \tag{30}$$

gegeben. Setzt man $\Phi = \Phi_1 + i\,\Phi_2$ und $tg\,\Phi = f$, $k = Ke^{i\varkappa}$, $k' = K'e^{i\varkappa'}$, so folgt

$$tg\Phi = \frac{K(K'^2-1)\cos\varkappa - K'(K^2-1)\cos\varkappa' - i[K(1+K'^2)\sin\varkappa - K'(1+K^2)\sin\varkappa']}{1 + 2\,K\,K'\cos(\varkappa+\varkappa') + K^2K'^2} \tag{31}$$

und hier sind Real- und Imaginärteil die beiden Invarianten eines Geradenpaares gegenüber komplexen Ähnlichkeiten in $\mathfrak{E}$. Aus $tg\,\Phi = f$ ergibt sich Φ mittels

$$\sin 2\Phi_1 = \frac{f+\bar{f}}{\sqrt{(f^2+1)(\bar{f}^2+1)}},\quad Sh\,2\Phi_2 = \frac{i(f-\bar{f})}{\sqrt{(f^2+1)(\bar{f}^2+1)}}. \tag{32}$$

Dieser komplexe Winkel zweier komplexen Geraden in $\mathfrak{E}$ erfährt in $\mathfrak{S}$ eine einfache Deutung. Der ersten Geraden entspricht in $\mathfrak{S}$ ein Drehnetz, dessen eine Brennlinie in der Ebene $\zeta = \mathfrak{X}_3 : \mathfrak{X}_0 = (k+1):(k-1)$ liegt, analog bei der zweiten Geraden $\zeta' = \mathfrak{X}_3' : \mathfrak{X}_0' = (k'+1):(k'-1)$. Der quasielliptische Abstand ψ irgend eines Punktes der einen Brennlinie von irgend einem Punkt der anderen Brennlinie ist dann durch $tg\,\psi = (\zeta-\zeta'):(1+\zeta\zeta')$ gegeben, also ist

$$\Phi = \psi. \tag{33}$$

Haben die Geraden in $\mathfrak{E}$ reelle Richtung, so ist ihr reeller Winkel gleich dem reellen quasielliptischen Abstand der Träger der beiden entsprechenden Strahlbündel in $\mathfrak{S}$.

Zwei Punkte P und Q von $\mathfrak{E}$ haben gegenüber $\mathfrak{G}_8$ noch keine Invariante, wohl aber haben sie als Invariante gegenüber $\mathfrak{G}_7$ den Imaginärteil des Winkels ihrer Verbindungsgeraden mit irgend einer Geraden reeller Richtung. In $\mathfrak{S}$ entsprechen den Punkten P und Q die Strahlen p und q und $\mathfrak{G}_7$ bedeutet in $\mathfrak{S}$ die quasielliptische Ähnlichkeitsgruppe. p und q mögen die Ebenen $\mathfrak{F}$ und $\overline{\mathfrak{F}}$ in den Punkten $P_{\mathfrak{F}}$, bzw. $Q_{\mathfrak{F}}$, $P_{\overline{\mathfrak{F}}}$, $Q_{\overline{\mathfrak{F}}}$ schneiden. Die Geraden $[P_{\mathfrak{F}}\,Q_{\mathfrak{F}}]$, bzw. $[P_{\overline{\mathfrak{F}}}, Q_{\overline{\mathfrak{F}}}]$ mögen s in S, bzw. $\bar{S}$ schneiden. Dual kann man aus den auf s liegenden Kreispunkten $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ die Treffgeraden an p und q legen; diese liegen in zwei horizontalen Ebenen σ und $\bar{\sigma}$. Dann gilt

$$\ln(S\,\bar{S}\,\mathfrak{J}\,\overline{\mathfrak{J}}) = \ln(\sigma\,\bar{\sigma}\,\mathfrak{F}\,\overline{\mathfrak{F}}) = 4\,\Phi_2. \tag{34}$$

Darin ist Φ_2 der Imaginärteil des Winkels, den die Gerade $[PQ]$ mit irgend einer Geraden reeller Richtung in $\mathfrak{E}$ bildet.

(Deutet man die Höhen $\mathfrak{X}_3 : \mathfrak{X}_0 = \zeta$ von σ, i von $\mathfrak{F}$ und $-i$ von $\overline{\mathfrak{F}}$ in einer neuen *Gauß*schen Zahlenebene, so liegen alle Punkte ζ, die zusammen mit $\bar{\zeta}$ und $\pm i$ das Doppelverhältnis $e^{4\Phi_2}$ bilden, auf einem Kreis des Büschels, von dem $\pm i$ die Nullkreise sind).

Buchbesprechungen.

Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Von *H. Tietze.* In zwei Bänden. XX, 256 S. und IV, 305 S. München: Biederstein-Verlag. 1949. DM 18.—, geb. DM 25.—.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser in den letzten 17 Jahren in München für Hörer aller Fakultäten gehalten hat. Es wendet sich also an einen größeren Kreis von Personen, von denen nur das Eine verlangt wird, daß sie Interesse für Mathematik haben. Das Buch enthält 14 Vorlesungen, in denen verschiedene Probleme der Mathematik behandelt werden. Klarerweise mußte sich der Verfasser auf solche Probleme beschränken, die man Nicht-Mathematikern verständlich machen kann. Das gelingt dem Verfasser in ganz hervorragender Weise. Der Leser gewinnt damit Verständnis für die Fragestellungen und Lösungen (soweit sie existieren). Von Beweisen mußte natürlich meist abgesehen werden. Die ausgewählten Probleme gehören den verschiedensten Gebieten der Mathematik an. Ich nenne: Verteilung der Primzahlen, Auflösung algebraischer Gleichungen, das große Fermat'sche Problem, Dreiteilung des Winkels, Quadratur des Kreises, Konstruktion der regulären Vielecke, das Vierfarbenproblem, der Zahlbegriff, der Dimensionsbegriff, das Kontinuumproblem, nicht-euklidische Geometrie. Die einzelnen Vorlesungen können unabhängig voneinander gelesen werden. Vor Wiederholungen scheut der Autor nicht zurück. Das Buch enthält sehr viele biographische und historische Daten, die auch dem Mathematiker teilweise neu sind, ihn lebhaft interessieren und speziell für den Mathematik-Lehrer von großem Wert sind. Wer die Arbeiten des Verfassers kennt, wundert sich nicht über die überaus große Anzahl von Anmerkungen. Sie enthalten, soweit sie am Ende jedes Bandes stehen, auch Beweise für vorgeschrittene Leser und zahlreiche Hinweise auf die Literatur. So ist das Buch auch den Studierenden der Mathematik wärmstens zu empfehlen. Während die meisten mathematischen Bücher rein sachlich die Probleme erörtern, ist dieses Buch mit einer inneren Wärme geschrieben, die den Leser tief ergreift. *N. Hofreiter*, Wien.

Substitutional Analysis. Von *D. E. Rutherford.* (Science and Mathematics: Nr. 1) XI, 103 S. Edinburgh: At the University Press. 1948. Geb. 25 s. net.

In der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe spielen bekanntlich die Young'schen Tableaus eine fundamentale Rolle. A. Young selbst ist von der Invariantentheorie her zu diesen Tableaus gekommen. Er hat seine Untersuchungen in den acht Arbeiten unter dem Titel „On quantitative substitutional analysis", welche in den Proceedings London in den Jahren 1900—1933 erschienen sind, dargestellt. Die meisten Arbeiten enthalten Anwendungen auf die Invariantentheorie und eine ganze Reihe weiterer Arbeiten sind nur dem gewidmet. Es ist nun sehr zu begrüßen, daß uns der Verfasser die Young'schen Untersuchungen, abgesehen von den oben erwähnten Anwendungen, in übersichtlicher Weise, unter Verwendung moderner Methoden, zugänglich gemacht

hat. Eine erhebliche Vereinfachung der Young'schen Theorie wurde von *v. Neumann* erzielt, ebenso von *Thrall* bei der orthogonalen Darstellung von *Young*. Der Verfasser hat viele eigene Untersuchungen in dieses Werk hinein gewoben, wie er überhaupt bestrebt war, überall die einfachste Beweisanordnung durchzuführen. Die Darstellung ist übersichtlich und man kann den Ausführungen des Verfassers gut folgen. Es soll nun eine kurze Inhaltsübersicht gegeben werden: I. Das Rechnen mit Permutationen. II. Die Young'schen Tableaus. Hier finden sich die bekannten Schemas der Theorie mit Hilfe des v. Neumann'schen Satzes elegant entwickelt (vgl. dazu z. B. auch van der Waerden, Moderne Algebra II). III. Die halbnormale Darstellung. IV. Die orthogonale und die natürliche Darstellung. V. Die Gruppencharaktere. VI. Substitutional Equations. Darunter ist folgendes zu verstehen: Es seien X, R, L Elemente der Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe nach *Young* „substitutional Expressions". Dann werden Gleichungen studiert $LX = R$, wo L, R gegeben und X gesucht ist (Substitutional Equations).

Ein Anhang, in dem für die S_3 die wichtigsten Größen der Young'schen Theorie ausgerechnet sind, beschließt das inhaltsreiche Werk. *E. Hlawka*, Wien.

Equazioni differenziali nel campo reale. Von *G. Sansone*. Zweiter Teil. Zweite Auflage. XVI, 475 S. Bologna: N. Zanichelli. 1949. Lire 4000.—.

Alle Eigenschaften, die in der Besprechung des ersten Teiles rühmend hervorgehoben wurden, kommen auch dem nunmehr vorliegenden zweiten Teil zu; ich beschränke mich daher auf eine Inhaltsübersicht, um die Umgrenzung des Stoffes deutlich zu machen:

Im Anfangskapitel (VII) wird das asymptotische Verhalten der Lösungen insbesondere linearer Differentialgleichungen untersucht, wobei vor allem die Bessel'sche Differentialgleichung behandelt wird. Kap. VIII handelt von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen im Großen; dabei findet ein interessanter Satz von *Tonelli* über die Nullstellen der Lösungen einer homogenen (nicht linearen) Differentialgleichung 2. Ordnung sowie wichtige neuere Ergebnisse italienischer Mathematiker (*Scorza-Dragoni*, *Cinquini*) über die Existenz von Lösungen einer Differentialgleichung 2. Ordnung, die zwei gegebene Punkte verbinden, ihren Platz. In Kap. IX wird die Theorie der singulären Punkte und der singulären Lösungen kurz behandelt. Das X. Kapitel ist den Methoden des Operationskalküls gewidmet. Nach Besprechung der mehr formalen Theorien findet die Laplace-Transformation eine ausführliche Darstellung. Den Schluß des Kapitels bildet der Abriß einer schon 1909 von *Giorgi* zur Begründung des Heavisidekalküls gegebenen Methode. Kap. XI bringt die numerischen, graphischen und mechanischen Methoden, auch die „Schleppe" von *Vietoris* wird behandelt. Das Schlußkapitel (XII) bringt eine gegenüber der 1. Auflage stark vermehrte Anzahl ausgewählter Beispiele von Differentialgleichungen, die den verschiedensten Anwendungen entnommen sind und jede nach einer individuellen Methode untersucht werden. Es handelt sich um einige komplizierte Schwingungsprobleme, die Emden'sche Gasgleichung, eine Gleichung von *Polvani* über die Elektronenbewegung im Hull'schen Magnetron, eine Gleichung von *Thomas* und *Fermi* aus der Atomphysik und die Schrödingergleichung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das nunmehr vollständig vorliegende Werk eine der vielseitigsten und modernsten Darstellungen des Stoffgebietes bietet. *J. Radon*, Wien.

Functions of a Complex Variable with Applications. Von *E. G. Phillips*. Sechste Auflage. Mit 17 Textabb., XI, 140 S. Edinburgh und London: Oliver and Boyd. 1949. Geb. 5 s. net.

Dieses Buch bringt aus der Funktionentheorie ungefähr so viel, wie man in einem Semester in einer Universitätsvorlesung vorträgt (Analytische Funktionen, Potenzreihen, konforme Abbildung, Integrationen im Komplexen, Residuensatz). Für den angewandten Mathematiker sind die zahlreichen speziellen konformen Abbildungen und die Berechnungen von bestimmten Integralen mit Hilfe des Residuensatzes von besonderem Interesse. Die Darstellung ist präzis und etwas knapp. Daher kann man das Buch in erster Linie Hochschülern neben der Vorlesung empfehlen. Daß das Buch sehr beliebt ist, geht schon daraus hervor, daß fast jedes Jahr eine neue Auflage notwendig ist.

N. Hofreiter, Wien.

Projektive Geometrie. Von *W. Blaschke*. Zweite Auflage. Mit 61 Textabb., 160 S. Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbüttler Verlagsanstalt. 1948.

Die erste Auflage wurde bereits in dieser Zeitschrift 52/3 besprochen. Die Tatsache, daß nach so kurzer Zeit bereits eine zweite Auflage notwendig war, zeigt, welchen Anklang das Buch beim mathematischen Publikum gefunden hat. Es wurden keine großen Änderungen vorgenommen. Ein Bild von *Staudt* schmückt die zweite Auflage.

E. Hlawka, Wien.

Le superficie algebriche. Von *F. Enriques*. XVI, 464 S. Bologna: N. Zanichelli. 1949.

Das Buch enthält die Theorie der algebraischen Flächen, welche mit den geometrischen Methoden der italienischen Schule behandelt werden. Es ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die *Enriques* an der Universität Rom gehalten hat. Ein Teil des Stoffes wurde im wesentlichen bereits früher lithographiert herausgegeben. Die damalige Ausgabe wurde durch neue Forschungen ergänzt und nach dem Tode *Enriques'* von *Castelnuovo* herausgegeben. Das Werk stellt nunmehr zusammenfassend das Lebenswerk des livornesischen Mathematikers dar, soweit es die algebraischen Flächen betrifft.

Es war nicht die Absicht des Autors nur das darzustellen, was bereits als gesicherte Theorie vorliegt, sondern auch dem Leser die Mannigfaltigkeit der neuen Fragestellungen und offenen Probleme vor Augen zu führen. Im folgenden geben wir eine kurze Inhaltsangabe, die natürlich ein nur unvollkommenes Bild von der Reichhaltigkeit dieses groß angelegten Werkes vermitteln kann: Nach einer kurzen Einleitung über birationale Transformationen und die Auflösung der Singularitäten behandelt das erste Kapitel die linearen Kurvensysteme auf einer Fläche, die Verallgemeinerung der Bertinischen Sätze und den Restsatz. Kap. II bringt die Theorie der Jacobischen Systeme, die kanonischen und mehrkanonischen Systeme, das geometrische Geschlecht und die Mehrgeschlechter. Das nächste Kapitel behandelt die adjungierten und subadjungierten Flächen. In Kap. IV wird das arithmetische Geschlecht eingeführt und der Satz von Riemann-Roch für Flächen bewiesen. Kap. V ist weiteren arithmetischen Invarianten gewidmet. Es wird die Zeuthen-Segresche Invariante untersucht. Ferner werden die Moduln von Klassen algebraischer Flächen untersucht. In Kap. VI werden Abschätzungen für die Geschlechter behandelt. Kap. VII klassifiziert die Flächen vom linearen Geschlecht Eins. Kap. VIII ist einer genaueren Diskussion der regulären kanonischen und mehrkanonischen

Flächen gewidmet. Es findet sich hier eine Fülle von Resultaten über die Fälle niedriger Geschlechtszahlen. In Kap. IX werden die kontinuierlichen Kurvensysteme auf irregulären Flächen und die Charakterisierung der irregulären Flächen studiert. Kap. X bringt eine ausführliche Diskussion der Flächen mit dem geometrischen Geschlecht Null. Hier finden sich insbesondere elliptische Flächen mit dem Geschlecht Null. Weiters werden Flächen, deren Mehrgeschlechter gleich Null sind, untersucht. Das letzte Kapitel (XI) handelt von den Flächen, die unendlich viele birationale Transformationen in sich zulassen und von der Charakterisierung der elliptischen und hyperelliptischen Flächen, sowie allgemein von dem Problem der Klassifikation der algebraischen Flächen nach dem Zwölfgeschlecht P_{12}.

Die Ausstattung des Buches ist mustergültig.

K. Prachar, Wien.

Grundlagen der abzählbaren Geometrie. Von *F. Severi*. Ins Deutsche übersetzt von *W. Gröbner* („Mathematische Forschung": Band 1, Heft 2). 124 S. Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt. 1948.

Nach einer vierzigjährigen, außerordentlich erfolgreichen wissenschaftlichen Tätigkeit veröffentlichte *F. Severi* die Abhandlung: „I fondamenti della geometria numerativa" in den Annali di Matematica, 19 (1940), 153—242. Darin werden die Grundlagen der abzählenden Geometrie von einem neuen allgemeineren Gesichtspunkt dargestellt und neue Ergebnisse erzielt. Um diese bedeutsame Arbeit den deutschen Lesern leichter zugänglich zu machen, hat Prof. *W. Gröbner* (Innsbruck) sie ins Deutsche übersetzt und in Buchform herausgegeben. Neu ist eine ausführliche historisch-kritische Einleitung, in der *Severi* in einer für jedermann leicht verständlichen Art die wichtigsten Prinzipe der abzählenden Geometrie entwickelt und einen historischen Überblick gibt. Das Buch enthält ferner gegenüber der italienischen Abhandlung zahlreiche Ergänzungen, wodurch es leichter lesbar wird. Dieses Buch wird dazu beitragen, daß die in Italien mit so großem Erfolg betriebene algebraische Geometrie auch deutschen Lesern besser bekannt wird. Man merkt dem Buch nicht an, daß es eine Übersetzung ist. Prof. *W. Gröbner* bringt aber auch die idealen Voraussetzungen eines Übersetzers mit: Vorzügliche Kenntnis beider Sprachen und selbst ein hervorragender Forscher auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie.

N. Hofreiter, Wien.

Leçons de géométrie différentielle. Von *G. Vranceanu*. Band I. 422 S. Bukarest: 1947.

Das Werk, dessen erster Band hier vorliegt, behandelt die neuere Entwicklung der Differentialgeometrie, deren Ursprung durch die Namen *Ricci*, *Einstein*, *Levi-Civita* und *Weyl* gekennzeichnet ist. In sechs Kapiteln behandelt es nach einem einleitenden Teil über kontinuierliche Gruppen, Pfaff'sche Formen und Kurvenkongruenzen, die Theorie der affin zusammenhängenden, der Riemann'schen und der projektiv zusammenhängenden Räume.

Es liegt hier eine großangelegte Verarbeitung des in den letzten Jahrzehnten immens angestiegenen Stoffes vor, die zwar im Rahmen eines Lehrbuches unmöglich erschöpfend sein kann, aber doch dem Leser eine gründliche Einführung in die wichtigsten Interessengebiete der modernen Differentialgeometrie bietet.

Zur angewandten Methode ist zu bemerken, daß der Autor sich sowohl des Riccikalküls als auch einer an *Cartan* anschließenden Form der Darstellung bedient, bei der n unabhängige Kongruenzen im n-dimensionalen Raum zugrundeliegen oder, was dasselbe ist, in jedem Punkt des Raumes ein n-Bein als Bezugssystem vorgegeben ist.

Der zweite Band soll u. a. die Theorie des konformen Zusammenhanges bringen. *J. Radon* Wien.

Grundlagen der höheren Geodäsie. Von *F. Hopfner*. Mit 26 Textabb., VIII, 246 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 75.—, geb. S 81.—; sfr. 32.60, geb. sfr. 35.20; $ 7.50, geb. $ 8.10; DM 25.—, geb. DM. 27.—.

Das vorliegende Buch ist das letzte Werk, welches uns der Verfasser, der auf so tragische Weise von uns gegangen ist, hinterlassen hat.

Es stellt sich die Aufgabe, nur das Wesentliche der Probleme der höheren Geodäsie herauszustellen und sie mit den Methoden der Differentialgeometrie und Potentialtheorie zu behandeln. Dagegen wird der Tendenz des Buches entsprechend auf numerische Methoden, z. B. die Ausgleichsrechnung, nur kurz eingegangen und auf die Werke von *Helmert*, *Jordan* und die Formelsammlung von *Albrecht* verwiesen. In dieser Form entspricht das Werk einem dringenden Bedürfnis, da die oben zitierten Werke entweder veraltet oder enzyklopädisch sind. Besonders ausführlich beschäftigt sich der Verfasser mit der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie in Hinblick auf das Geoid. Es soll nun eine kurze Inhaltsübersicht gegeben werden: Teil 1: Anwendung der Flächentheorie auf die Probleme der höheren Geodäsie. Einleitung, Sätze der Flächentheorie und Variationsrechnung. Es werden die benötigten Tatsachen aus der Differentialgeometrie kurz entwickelt. I. Das abgeplattete Rotationsellipsoid: Länge des Meridianbogens und Krümmung. II. Die geodätische Linie: Allgemeine Entwicklungen, Satz von *Clairaut Weingarten*'sche Potenzreihen zur Berechnung der geodätischen Linien des abgeplatteten Rotationsellipsoides, Reduktion auf die geodätische Linie, die beiden Hauptaufgaben der geodätischen Übertragung. III. Das geodätische Dreieck: Inhaltsberechnung. IV. Das Dreiecksnetz am abgeplatteten Rotationsellipsoid als Referenzfläche: Reduktion der gemeinsamen Grundlinien, Horizontalwinkel, Stationsausgleichung, Dreiecksberechnung, geodätische Übertragung, Netzausgleichung. Hier wird auch die abgekürzte Methode von *Schreiber* besprochen. Zweiter Teil: Anwendung der Lehre vom mechanischen Potential auf die Probleme der höheren Geodäsie. Einleitung: Sätze aus der Theorie der Kugelfunktion und des mechanischen Potentials. I. Die Niveauflächen der Erde: Orthometrische und dynamische Höhen, Satz von *Villarceau*, Theorie von *Bruns*. II. Das Geoid: *Rudzkis* Inversionsverfahren, Niveausphäroid von *Bruns*, die Sätze von *Clairaut* und *Bruns*, die Reduktionsverfahren beobachteter Schwerkraft von *Prey* und *Rudzki*, zweite Randwertaufgabe für das Geoid nach *Hopfner*. III. Störungen der Intensität und Richtung der Schwerkraft: Term von *Bruns*, dritte Randwertaufgabe angewendet auf das Geoid, Lotstörungen, Satz von *Poincaré*. IV. Die Methoden der praktischen Geodäsie zur Bestimmung der Erdfigur oder kleiner Teile von ihr: Grundsätzliche Bemerkungen, die Geoide von *Ackerl* und *Hirvonen*, Erdabplattung und die Breitengradmessung, Erdellipsoid von *Hayford*, Methode von *Prey*, astronomisches Nivellement. Die Darstellung ist äußerst klar und übersichtlich, die Ausstattung hervorragend. *E. Hlawka*, Wien.

Rank Correlation Methods. Von *M. G. Kendall*. Mit Textabb., VII, 160 S. London: Ch. Griffin & Company Limited. 1948.

Das vorliegende Buch stellt eine ausgezeichnete Einführung in die Praxis und Theorie der Rangkorrelationen dar. Die einfachste Problemstellung sei an einem dem Werk entnommenen Beispiel erläutert: Eine Anzahl von Schülern wird auf ihre Begabung für Musik und Mathematik untersucht und das Ergebnis in Form einer ganzzahligen Skala ausgedrückt. Wie ist es möglich, eventuelle Beziehungen zwischen diesen beiden Talenten auf Grund der Versuchsergebnisse exakt zu erfassen? Diesem Zweck dient die Definition eines Korrelationskoeffizienten τ, der folgende Eigenschaften besitzt: Bei vollständiger Übereinstimmung der durch die Skalen ausgedrückten Ränge nimmt er den Wert 1 an, bei genau entgegengesetzter Ordnung -1 und im übrigen ist er dem Betrage nach < 1. Der Leser findet auch die Definition eines Koeffizienten ϱ, der analoge Eigenschaften aufweist und von dem Psychologen *Spearman* gegeben ist. Es ist ja klar, daß die Praxis der Rangkorrelationen die Psychologie besonders interessiert. Diesen beiden Definitionen ist nun Kapitel 1 gewidmet. Es sei hier gleich erwähnt, daß eine große Anzahl gut gewählter und sorgfältig durchgeführter Beispiele im ganzen Buch zu finden ist. Kapitel 2 beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie der Rangkorrelation. Es wird ein Koeffizient definiert, welcher ϱ, τ und den bekannten Produktmoment-Korrelationskoeffizienten als Sonderfall enthält. Das Verhältnis von Kapitel 1 zu Kapitel 2 charakterisiert die Anlage des ganzen Buches: Zuerst wird alles für den angewandten Statistiker Wissenswerte angeführt und dann folgt die mathematische Begründung und tiefergehende Analyse. Kapitel 3 zeigt, wie man vorgeht, wenn sich die Ganzzahligkeit der Skalen in der Bewertung von Eigenschaften nicht mehr aufrecht erhalten läßt. Die beiden folgenden Kapitel sind Testverfahren gewidmet: Einer Grundgesamtheit wird eine Stichprobe entnommen. Wir nehmen an, daß zwei den Elementen derselben zukommende Eigenschaften Veranlassung zur Bildung von τ geben. Es erhebt sich dann die Frage, welche Aussage man über die Beziehung der Eigenschaften in der Grundgesamtheit machen kann. Zu diesem Zwecke wird die Verteilung einer Größe, welche im wesentlichen mit τ übereinstimmt, untersucht. Sie ist asymptotisch normal. Kapitel 6 und 7 bringen die Erweiterung der Fragestellung auf beliebig viele Skalen. Die mathematische Behandlung dieser Probleme ist nicht mehr ganz einfach und gewisse interessante Fragen harren noch der Erledigung. Nach einem Abschnitt über teilweise Rangkorrelation wird in den beiden folgenden Kapiteln die Beziehung zwischen Rang und Normalkorrelation ausführlich erörtert. Die beiden letzten Kapitel sind einer Fragestellung gewidmet, die wohl im wesentlichen Psychologen interessiert. Für die hier dargelegten Methoden muß auf das Buch verwiesen werden. Reichhaltiges Tafelmaterial sowie ein Namens- und Sachverzeichnis beschließen das Werk. Die gute Ausstattung sowie die am Ende jedes Kapitels befindlichen Literaturangaben, die durchweg bis in die unmittelbare Gegenwart heranreichen, erhöhen den Wert des Buches, das wohl jeder Statistiker, der mit der Rangkorrelation vertraut sein will, gelesen haben muß. *L. Schmetterer*, Wien.

Sequential Analysis. Von *A. Wald*. XII, 212 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1947. $ 4.—.

Die üblichen Testtheorien gehen von Stichproben festen Umfanges aus. Es war ein bedeutsamer Gedanke des Autors, den Stichproben-Umfang in einem statistischen Test als zufällige Variable anzusehen. Das sich hieraus

ergebende Verfahren, die „sequential analysis", hat sich als theoretisch und praktisch sehr wertvoll erwiesen und wird hier in anziehender und verständlicher Weise dargestellt, wobei für das Studium des Textes der ersten drei Teile nur elementare mathematische Kenntnisse nötig sind. Schwierigere Fragen werden in einem Anhang behandelt.

Kapitel I legt zunächst grundlegende Begriffe dar (Zufällige Variable, Wahrscheinlichkeitsdichte, Verteilungsfunktion, Erwartungswert usw.) und wendet sich dann in kurzer, aber sehr klarer Darstellung der Testtheorie von *Neymann* und *Pearson* zu. Im folgenden Kapitel wird die allgemeine Definition eines sequential Testes für eine statistische Hypothese H gegeben: Man teile für jedes natürliche m die Gesamtheit der Stichproben vom Umfang m in 3 zueinander fremde Klassen, derart, daß H angenommen wird, wenn die Stichprobe eines Versuches der 1. Klasse angehört, verworfen wird, wenn sie der 2. angehört und der Versuch fortgesetzt wird, wenn sie der 3. zugehört. Nimmt man im Augenblick an, daß die Verteilung der Grundgesamtheit nur von einem unbekannten Parameter t abhängt, dann ist nach Wahl dieser Klassen, die Wahrscheinlichkeit der Annahme einer Hypothese über den tatsächlichen Wert von t offenbar eine Funktion $L(t)$ von t. Diese sowie der Erwartungswert des Stichprobenumfanges $E(t)$ spielen im weiteren Verlauf eine fundamentale Rolle. Es ist klar, daß man jene Tests vorziehen wird, welche unter gewissen Bedingungen den kleinsten Erwartungswert von m liefern. (Optimaler Test). Dies ist in groben Zügen der Inhalt des 2. Kapitels. Im folgenden wird ein Verfahren behandelt, welches einem optimalen Test beliebig nahekommt, wobei es sich darum handelt, eine statistische Hypothes H_0 gegenüber einer Alternative H_1 anzunehmen. Praktisch tritt wohl meist der Fall auf, daß eine einfache oder zusammengesetzte Hypothese gegenüber unendlich vielen Hypothesen anzunehmen ist. Diesem natürlich schwierigeren Problem ist das Kapitel 4 gewidmet. Das 5. Kapitel leitet den zweiten Teil des Buches ein und dieser beschäftigt sich mit theoretisch interessanten und praktisch bedeutsamen Anwendungen der allgemeinen Theorie, also z. B. Testverfahren für den Mittelwert einer Binomialverteilung, für den Unterschied zweier Mittel solcher Verteilungen und ähnliche Fragen für die Normalverteilung. Mit Kapitel 10 beginnt Teil 3 des Buches, welcher den Fragenkomplex der Parameterabschätzung auf die Methoden der sequential analysis überträgt. Schließlich werden im Anhang eine Reihe höchst anziehender und tiefergelegener Probleme besprochen, so z. B. die theoretisch wie praktisch sehr bedeutsame Frage, ob ein sequential Test notwendig mit einer Wahrscheinlichkeit 1 nach endlich vielen Schritten beendet werden kann Dies wird für das im Kapitel 3 behandelte Verfahren bejahend entschieden Eine ausführliche Analyse erfahren die Funktionen $L(t)$ und $E(t)$ usw. Ein sorgfältig zusammengestelltes Sachverzeichnis beschließt das Werk. Im Verlaufe des Textes sind immer wieder Fußnoten eingestreut, welche zahlreiche Literaturangaben enthalten und stets den gegenwärtigen Stand der Forschung berücksichtigen. Der für eine Rezension zur Verfügung stehende Raum verbietet es, auf weitere Einzelheiten einzugehen, doch sei noch die hervorragende Ausstattung des Buches hervorgehoben. Nach Ansicht des Ref. muß jeder in seinem Fach interessierte Statistiker das Buch studiert haben, was durch die meisterhafte und in sich geschlossene Darstellung, die trotz aller Strenge nur ein Minimum an Vorkenntnissen verlangt, möglich ist. Man kann es daher nur sehr bedauern, daß es die gegenwärtige Situation noch immer nicht erlaubt, daß solche Bücher in Österreich einem möglichst großen Leserkreis bekannt werden.

L. Schmetterer, Wien.

Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik. Von *H. Reichenbach.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Reihe der Grundlehren der exakten Wissenschaften: Band I). Mit 7 Textabb., 200 S. Basel: E. Birkhäuser. 1949. sfr. 19.—, geb. sfr. 23.—.

Als im Jahre 1926 die Quantenmechanik in kurzer Zeit entwickelt wurde, stellte sich das Bedürfnis ein, die erhaltenen Resultate physikalisch und philosophisch zu deuten. Die *Heisenberg*'sche Unbestimmtheitsrelation und das *Bohr*'sche Komplementaritätsprinzip waren die Marksteine in dieser Entwicklung, am schönsten zusammengefaßt in *Heisenbergs* berühmten Buch „Physikalische Prinzipien der Quantenmechanik" 1930. Die weitere Entwicklung war vom Bestreben gekennzeichnet, den so gewonnenen Apparat der Quantentheorie zu verallgemeinern und auf die Theorie der Elementarteilchen anzuwenden. Hier sind aber Schwierigkeiten aufgetreten, die bis heute nicht behoben sind. Es erscheint daher heute notwendig, die Prinzipien der Quantentheorie neuerlich durchzudenken. Dies hat der bekannte Philosoph *H. Reichenbach* in dem vorliegenden Werk durchgeführt, welches zuerst in der englischen Ausgabe 1943 erschienen ist.

Der erste Teil bringt die allgemeinen Gedankengänge und ihre philosophische Interpretation, während der zweite Teil den mathematischen Apparat der Quantenmechanik entwickelt. Das Schwergewicht liegt im dritten Teil „Interpretation". Das Ergebnis der äußerst scharfsinnigen Untersuchung der Verf. kann kurz so zusammengefaßt werden: Wenn wir Aussagen über Werte unbeobachteter Größen als sinnlos ansehen, so müssen wir, wenn die gewöhnliche zweiwertige Logik zu Grunde gelegt wird, sinnlose Aussagen in der physikalischen Sprache zulassen. Soll dies vermieden werden, so müssen wir die traditionelle Logik zu einer dreiwertigen Logik erweitern, welche außer den Wahrheitswerten „Wahrheit" und „Falschheit" auch noch einen dritten Wahrheitswert: „Unbestimmtheit" enthält. Diese Logik wird aufgebaut und gezeigt, daß die bekannten kausalen Anomalien der Quantentheorie in dieser neuen Sprache verschwinden. Es ist bekannt, daß der Verf. eine von der üblichen und von dieser hier entwickelten Logik verschiedene zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet hat.

Die Untersuchungen werden in der anregenden und sorgfältigen Weise dargestellt, wie wir sie schon aus früheren Schriften des Verf. kennen. Die Ausstattung des Buches ist friedensmäßig. *E. Hlawka*, Wien.

Autorenverzeichnis.

I. Originalarbeiten.

Atkinson, F. V. Symmetric linear operators on a Banach space S. 278.

Berwald †, *L.* Obere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei Eilinien und die entsprechenden Größen bei Eiflächen. S. 202.

Fabricius-Bjerre, Fr. Nichteuklidische Fußpunktkurven. S. 298.

Gröbner, W. Über die Syzygientheorie der Polynomideale. S. 1.

Hadwiger, H. Über Maßzahlen und Ungleichungen bei Mittelpunktseikörpern. S. 132.

Hlawka, E. Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper. S. 81.

Hohenberg, F. Reelle birationale Strahlverwandtschaften im Raum als Bilder komplexer ebener Cremonatransformationen. S. 324.

Hornich, H. Beschränkte Integrale auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen. S. 187.

Inzinger, R. Über eine lineare Transformation in den Mengen der konvexen und der stützbaren Bereiche einer Ebene. S. 227. Stützbare Bereiche, trigonometrische Polynome und Defizite höherer Ordnung. S. 302

Koschmieder, L. Verallgemeinerte Ableitungen und hypergeometrische Funktionen. S. 169.

Lammel, E. Über das Verfahren von Theodorsen zur numerischen Berechnung der Abbildungsfunktion eines einfach zusammenhängenden Bereiches. S. 257

Mayer, W. The linear mappings of the E_n into itself. S. 42.

Müller, H. R. Die Böschungslinien des elliptischen Raumes. S. 151.

Petersson, H. Über die Transformationsfaktoren der relativen Invarianten linearer Substitutionsgruppen. S. 17.

Prachar, K. Zur Eulerschen Summierung Neumannscher und Legendrescher Reihen. S. 138 Über höhere Minima quadratischer Formen. S. 268.

Rédei, L. Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen. S. 221.

Rößler, F. Über verallgemeinerte Reliefperspektiven. S. 211.

Schaller, H. Zum räumlichen Rückwärtseinschneiden. S. 184.

Schmetterer, L. Zur Fourierentwicklung des Produktes zweier Funktionen. S. 53.

Wunderlich, W. Ein Spiegelproblem. S. 63.

II. Buchbesprechungen.

Blaschke, W. Projektive Geometrie. *(E. Hlawka.)* S. 338.

Coxeter, H. S. M. Regular Polytopes. *(E. Hlawka.)* S. 166.

Duschek, A., und *A. Hochrainer*, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. I. Teil: Tensoralgebra. *(N. Hofreiter.)* S. 167.

Eddington, A. Philosophie der Naturwissenschaft. *(J. Radon.)* S. 251.

Enriques, F. Le superficie algebriche. *(K. Prachar.)* S. 338.

Finzi, P., und *Maria Pastori.* Calcolo tensoriale e applicazioni. *(J. Radon.)* S. 254.

Fort, T. Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain. *(J. Radon.)* S. 167.

Gombás, P. Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendung. *(E. Hlawka.)* S. 255.

Gröbner, W. Moderne algebraische Geometrie. *(E. Hlawka.)* S. 253.

Gröbner, W., und *N. Hofreiter*, Integraltafel I. Teil: Unbestimmte Integrale. *(L. Vietoris.)* S. 166.

Grover, C. A. Hyperbolic Functions. *(N. Hofreiter.)* S. 254.

Hahn, H., und *A. Rosenthal.* Set Functions. *(J. Radon.)* S. 73.

Holzer, L. Mathematik von der Mittelschule zur Hochschule. *(E. Hlawka.)* S. 253.

Hopfner, F. Grundlagen der höheren Geodäsie. *(E. Hlawka.)* S. 340.

Kendall, M. G. Rank Correlation Methods. *(L. Schmetterer.)* S. 341.

Locher-Ernst, L. Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen. *(E. Hlawka.)* S. 74.

Miller, W. H. A. C. Network Analysis by Symbolic Algebra. *(O. Plechl.)* S. 78.

Müller, E.† und *E. Kruppa.* Lehrbuch der darstellenden Geometrie. *(N. Hofreiter.)* S. 77.

Phillips, E. G. Functions of a Complex Variable with Applications. *(N. Hofreiter.)* S. 338.

Polya, G. How to Solve it. *(E. Hlawka.)* S. 165.

Reichenbach, H. Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik. *(E. Hlawka.)* S. 343.

Relton, F. E. Applied Differential Equations. *(N. Hofreiter.)* S. 75.

Rutherford, D. E. Substitutional Analysis. *(E. Hlawka.)* S. 336.

Sansone, G. Equazioni differenziali nel campo reale II. Teil. *(J. Radon.)* S. 337.

Schrutka, L. Elemente der höheren Mathematik. *(N. Hofreiter.)* S. 166.

Schüepp, H. Spannung und Spannungstensor. *(N. Hofreiter.)* S. 168.

Segre, B. Lezioni di geometria moderna I. *(E. Hlawka.)* S. 75.

Severi, F. Introduzione alla geometria algebrica. Geometria numerativa. *(W. Gröbner.)* S. 76.

Severi, F. Fondamenti di geometria algebrica. *(W. Gröbner.)* S. 77.

Severi, F. Funzioni quasi abeliane. *(W. Gröbner.)* S. 251.

Severi, F. Grundlagen der abzählbaren Geometrie. *(N. Hofreiter.)* S. 339.

Tietze, H. Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. *(N. Hofreiter.)* S. 336.

Thirring, H. Die Idee der Relativitätstheorie *(E. Hlawka.)* S. 78.

Tippet, L. H. C. Statistics. *(L. Schmetterer.)* S. 78.

Tricomi, F. Equazioni differenziali. *(W. Gröbner.)* S. 75.

Vranceanu, G. Leçons de géométrie différentielle. Bd. I. *(J. Radon.)* S. 339.

Wald, A. Sequential Analysis. *(L. Schmetterer.)* S. 341.

Whitehead, A. N. Einführung in die Mathematik. *(E. Hlawka.)* S. 73.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschienen:

Einführung in die sphärische Astronomie

Von

Prof. Dr. **Adalbert Prey**, Wien

Mit 123 Textabbildungen. VII, 316 Seiten. 1949

S 75.—, sfr. 24.—, $ 5.50, DM 22.—, geb. S 84.—, sfr. 26.—, $ 6.—, DM 24.

Die Maxwellsche Theorie in veränderter Formulierung

Von

Prof. Dr. techn. **Leonhard Kneissler**, Wien

X, 51 Seiten. 1949

S 20.—, sfr. 6.60, $ 1.50, DM 6.—

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **K.W. Fritz Kohlrausch**, Graz, und **Hans Thirring**, Wien

Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz

Soeben erschien:

3. Band, 2. und 3. Heft

(Ausgegeben im Dezember 1949)

Mit 75 Abbildungen. 172 Seiten. S 58.—, sfr. 21.—, $ 4.80, DM 20.—

Inhalt: **Musil, A.,** und **E. Schramke.** Rechnerische Zerlegung der Total-Dampfdruckkurven in die Partial-Druckkurven. Teil I: Theoretische Grundlagen und alte Methoden. — **Touschek, B. F.** Das Synchrotron. — **Lihl, F.** Über die bei Röntgen-Interferenzlinien auftretenden Erscheinungen der Interferenzpunktstreuung und der kantigen Linienbegrenzung. — **Braunsteiner, E.,** und **L. Castelliz.** Magnetische Messungen an Basalt. — **Sitte, K.** Bericht über neuere Arbeiten an durchdringenden Schauern und durchdringenden Teilchen. — **Skudrzyk, E.** Grundsätzliches zur Raumakustik. — **Reif, W.** Historische Bemerkungen über den *Yukawa*schen Potentialansatz. — **Ledinegg, E.** Über ein dem klassischen Minimumproblem homogener Differentialgleichungen vom *Sturm-Liouville*schen Typus zugeordnetes Variationsprinzip. — **Sexl, Th.** Beitrag zur Theorie des Kernphotoeffektes. — **Goubeau, J.,** und **H. Pajenkamp.** Rotationsisomerie bei einigen Hologenkohlenwasserstoffen. — **Benndorf, H.** *Egon Schweidler.* — **Buchbesprechungen**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria